APUNTES PARA EL ESTUDIO DEL MODELO INSUMO-PRODUCTO

Carlos Hernández

En la indagación que hemos seguido, en el intento de precisar la metodología matricial, para "simular" el funcionamiento de nuestra propuesta de modelo económico alternativo, hemos estudiado algunos elementos matemáticos, especialmente sobre el álgebra de matrices.

Después de nuestros estudios iniciales, hemos considerado necesario, explicar algunos fundamentos de la lógica de la construcción de la matriz de requisitos directos e indirectos, de la matriz inversa, de la matriz tecnológica y de la matriz identidad.

En lo que hemos podido observar, la falta de reflexión o el desconocimiento de estas cuestiones simples pero, a nuestro juicio profundas, sobre la matemática y el álgebra de matrices, limitan las posibilidades interpretativas de la matriz insumo-producto de la economía nacional.

Para recapitular esos elementos simples, hemos elaborado el presente artículo.

1.- Excedente Neto de Explotación y Matriz de Insumo-Producto

Hemos partido de una definición de modelo económico: trata del uso del excedente económico y la inducción de su reinversión, a través de políticas económicas, a determinadas ramas y/o productos, para propiciar una retroalimentación creciente de la economía.

En la matriz de insumo-producto de la economía nacional 1978 -MIP 78- pretendemos buscar una nueva forma de cálculo, partiendo del cuadrante de los ingresos primarios, efectuando transformaciones en el excedente neto de explotación -ENE- y examinando las repercusiones en el resto de cuadrantes al reinvertir las ganancias.

Como sabemos el ENE se asimila a la ganancia bruta, y la ganancia se divide, en el reciclaje ampliado de la economía, en el consumo personal de los empresarios y en la inversión. Desde luego que en la ganancia bruta habría que discriminar algunos rubros más, a fin de establecer la ganancia neta; pero para nuestra primera aproximación omitiremos este aspecto.

La determinación de esta forma de cálculo nos parece importante en la dirección de examinar el uso de la MIP en los siguientes sentidos:

a) explorar las repercusiones que ocasionan en el conjunto de la economía, políticas de fomento de la formación de capital, en determinadas ramas y/o productos.

b) examinar los resultados endógenos y exógenos de la canalización de una parte de las ganancias en un determinado rubro a otros.

2.- Una Dimensión del Problema: Metodología de Matrices

La contribución, a través del estudio de la matriz de insumo-producto, a la orientación de la política económica que sistematice el desarrollo, constituye, nos parece, un elemento de especial importancia nacional en la perspectiva del ya cercano siglo XXI. Porque aunque no lo parezca, está asociada al proceso de desarrollo estable y, consecuentemente, al mantenimiento de la paz.

Según nos hemos enterado, ya existe una versión de la Matriz de Insumo-Producto de la Economía Nacional, recientemente elaborada y de la que ya se inició su difusión, que será de indudable utilidad para la planificación nacional en la década del 90.

Alguien nos ha advertido que nosotros estamos analizando la MIP 78 cuando ya está elaborada la MIP de 1991

-MIP 91-.

Al respecto, consideramos necesario hacer las aclaraciones siguientes:

En primer lugar, no se nos informó del proceso de construcción de la MIP 91, a pesar de haber consultado a expertos de la Institución que la elaboró, hace aproximadamente un año, sobre aspectos de la MIP 78.

En segundo lugar, nuestra preocupación en la actualidad, es la búsqueda de una metodología matricial, que posibilite el uso de la matriz como una "brújula" -al decir de Ibisate-, para la orientación de inversiones nacionales -públicas y/o privadas-; para nosotros, examinando el uso del Excedente Neto de Explotación, en el reciclaje en niveles mayores de la economía.

Nuestra propuesta tiene, consideramos, algún sentido de la realidad.

Un examen de la capacidad que tiene cada rama (o producto) de invertir sus ganancias en otras, es necesario (porque no se puede invertir lo que no forma parte de las ganancias computadas en el Excedente Neto de Explotación) sí estamos hablando de los recursos generados en la economía nacional.

Partir de hipótesis de comportamiento en el cuadrante de la demanda final, -que comprende las inversiones- es adecuado y es lo usual, pero estamos explorando vías para hacer más realistas ésas hipótesis, examinando las ganancias que posibilitan la inversión, en el cuadrante de los ingresos primarios.

La necesidad de una exploración de este tipo, quizás se presenta con visos de utilidad práctica si consideramos el ENE en las ramas de la producción. La mayoría de las ganancias en 1978 provinieron -como se podrá notar en la ilustración que anexamos al final- del comercio, el café, alquileres de viviendas, ganadería y bienes inmuebles y otros servicios prestados.

Algunos de estos rubros están tipificados como económicamente improductivos -no generan bienes, en general- como el comercio y los alquileres de viviendas; o como productivos para el consumo personal -que no posibilitan de manera directa la reproducción ampliada de la economía- tal es el caso de la ganadería y como productivos, que presionan hacia la economía monocultivista agroexportadora, como el café.

Naturalmente que en términos de la valorización, esas actividades se traducen en expansión de la economía, en salarios, en consumo de capital fijo, en importaciones de bienes y servicios, en incremento de ganancias. Nosotros estamos explorando el uso del ENE en la generación de condiciones nacionales para una nueva fase de división nacional e inserción en la división internacional del trabajo. Esto, consideramos, debe constituir una preocupación estratégica, de los estadistas, con la finalidad de lograr la paz y el desarrollo en el largo plazo.

El estudio de la canalización de las ganancias de algunos de estos rubros, especialmente los improductivos, hacia otros que posibiliten de manera directa la formación de capital fijo y el desarrollo energético, por ejemplo, es necesaria, si tenemos claridad de la importante repercusión del desarrollo ascendente de la economía.

Con exámenes de este tipo, se puede posteriormente estructurar un conjunto de políticas encaminadas a determinar la fuente del excedente que servirá para propiciar la inversión relacionada directamente con la reproducción en mayores niveles de la economía.

En el largo plazo -que está profundamente unido al corto y mediano plazo- necesitamos, insistimos, inversiones encaminadas hacia una mayor división del trabajo nacional e inserción en la división internacional del trabajo, que redunden en incrementos crecientes en volúmenes de empleo, consumo, ahorro e inversión.

Para estos efectos metodológicos -de la lógica matricial de la canalización del ENE hacia otras ramas y productos-, no importa, en estos momentos, si trabajamos con la MIP 78 ó la MIP 91. Desde luego que sería mejor trabajar con la MIP 91, lo que intentaremos en la medida de nuestras posibilidades, pero, repetimos, ello no es determinante para nuestros propósitos, en estos momentos.

En el intento de tener referentes para explicarnos cierta utilidad de nuestra preocupación teórica, hemos recordado lo que le pasó a los egipcios con los griegos en la geometría: unos la iniciaron en función de las mediciones de los terrenos inundados recurrentemente por el río Nilo y los otros desarrollaron la geometría con aportes fundamentalmente teóricos.

Con la contribución teórica de los griegos -sistematizada por Euclides- la geometría se convirtió en ciencia, poniendo de relieve la importancia de la teoría y la metodología pura, digamos. No es la práctica, en este caso, la que desarrolló la teoría, es de la teoría -o de la práctica teórica, si se quiere- de la que han surgido innumerables aplicaciones prácticas.[1]

Naturalmente, no aspiramos a realizar aportes de la dimensión de Euclides; la comparación la hacemos solamente para indicar, que nuestra preocupación se ubica en el campo teórico y metodológico matricial, y que ello es completamente válido hasta por la historia de la matemática.

Además, la lógica interna de un modelo económico, expresado en la matriz, sus formas de comportamiento, no nos lo da la MIP 91, ni la del 78, perse. Nos la posibilita una abstracción económico-matemática.

En la metodología de matrices la exploración del uso del excedente y su canalización a nivel de política económica, es importante, insistimos, porque tiene repercusiones prácticas directas, de rentabilidad pública y privada, puesto que de inversiones se trata; y, de rentabilidad social, digamos, puesto que lo investigado contribuye a la construcción de un modelo econométrico que pretende usarse como herramienta para la planificación de inversiones en desarrollo, tan necesarias para el sostenido y sostenible -como se acostumbra a decir ahora- proceso de paz.

No desarrollaremos en este somero examen nuestros primeros planteamientos econométricos sobre el uso del excedente. En la preparación para construir ese modelo econométrico, hemos estudiado algunos elementos de álgebra de matrices que hemos considerado necesario trasladarlos en forma de apuntes para compartir experiencias y enfoques. De manera que este modesto artículo trata de elementos de la matriz tecnológica, la matriz identidad y la matriz inversa, como habíamos dicho.

4.- Fundamento Lógico del Cálculo de los Requisitos Directos e Indirectos.

En nuestro caso, apuntaremos algunas cuestiones que nos servirán en el examen de la matriz de insumo-producto de la economía nacional.

Hay cosas simples en las que es necesario detenerse.[2]

Por ejemplo, en la explicación de la matriz, al vector de las columnas, nosotros les llamamos "usuario". Nos da la impresión de que es una traducción libre de la palabra en inglés "user". Probablemente sería mejor traducirla como "consumidor".

En inglés se diferencia entre "user" y "producer". Las columnas están asignadas a los consumidores y las filas a los productores.

Tales palabras, nos parece, al momento de la enseñanza matricial en economía dejan cierta incomprensión, al realizar una traducción libre de productores y usuarios.

En español quien "usa" algo, puede ser comprador y/o vendedor y un productor puede comprar o vender, también.

Estas últimas (venta y compra) a nuestro juicio, son palabras más precisas para nuestra enseñanza del álgebra matricial en economía.

En lo que hemos reputado como "un vademecum para economistas", Alfredo Rodríguez y Carlos Rivera, nos explican, simplemente que en las filas de la matriz, se ubican los **sectores vendedores** y en las columnas los **sectores compradores.**

"En síntesis -dicen Rodríguez y Rivera- las filas nos dicen a quién vende la producción, esto es, la estructura de la demanda. Las columnas demuestran cómo está compuesta la producción, o sea la estructura de los costos".[3]

En aspectos directamente relacionados con la matriz, nosotros tenemos la necesidad de efectuar cálculos en la matriz de requisitos directos e indirectos.

Es fácilmente comprensible la construcción de la matriz de requisitos directos, pues resulta de la determinación de la proporción de los elementos componentes -el costo de producción- de los productos o ramas.

En consecuencia el Valor Bruto de la Producción, es igual a 1; y cada una de las 44 ramas o productos de la MIP 78 tiene -o no tiene- un porcentaje de participación en la generación de cada bien.

1 Barker, Stephen F., FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS, UTEHA, México, 1965.

2 Es interesante y necesario, nos parece, formularse preguntas como la siguiente: ¿cuál es la lógica interna de los cofactores?...¿cómo y porqué se eliminan filas y columnas?.
Una respuesta ha sido de que "así es", después de investigaciones y prácticas acumuladas. Pero es una respuesta que nos deja siempre en el mismo punto de partida, pues lo que queremos saber es precisamente porqué es así el "así es".

3 Rodriguez, Alfredo C. y Carlos A. Rivera Pereyra, INTERPRETACION DE INDICADORES ECONOMICOS, Ediciones Macchi, Buenos Aires, 1977, p. 345.

La situación se complica un poco más al examinar la matriz de requisitos directos e indirectos. Es decir, que además de las transformaciones que sufren las ramas relacionadas directamente, al aumentar en 1 la demanda final de un bien; se examinan las transformaciones que sufren las otras ramas de la economía, vinculadas indirectamente, a su vez, con los cambios operados en las ramas para producir lo necesario para satisfacer el aumento en 1 de la demanda final que originó la reacción en cadena.

A diferencia de la reacción en cadena atómica, que termina en una explosión, los efectos de la reacción en cadena matricial se van atenuando hasta volverse cero, es decir, hasta cuando están satisfechas las necesidades de producción del bien que aumentó en 1 su demanda final.

La explicación operativa de este proceso, desde el punto de vista matricial, no era clara para nosotros, a pesar de las consultas. Nuevamente, Rodríguez y Rivera, nos ejemplifican con claridad.

Rodríguez y Rivera parten de un ejemplo simple tomado de André Piatier (Estadística y Observación Económica, Tomo 2), que desagrega de la siguiente manera:

SECTORES VENDEDORES	SECTORES COMPRADORES			
	DEMANDA INTERMEDIA		C. DEMANDA FINAL	VALOR BRUTO DE PRODUCCION (A+B+C)
	A. AGRICULTURA	B. INDUSTRIA		
1. AGRICULTURA	40 (0.10)	180 (0.30)	180	400
2. INDUSTRIA	80 (0.20)	30 (0.05)	490	600
3. TOTAL INSUMOS (1+2)	120	210		
4. VALOR AGREGADO	280 (0.70)	390 (0.65)	670	
VALOR BRUTO DE PRODUCCION (3+4)	400 (1.00)	600 (1.00)		1.000

En la tabla anterior -en la que hemos agregado nosotros, entre paréntesis, los coeficientes técnicos- se ilustra un aspecto importante, relacionado con las duplicaciones contables en la matriz.

En efecto, en el Valor Bruto de la Producción -VBP- de la agricultura se contabiliza la producción industrial, que, a su vez, aparece contabilizada en el VBP de la industria y viceversa, en la producción industrial aparece contabilizada la producción agrícola que nuevamente se computa en el mismo sector agrícola.

La aclaración, que dan Rodríguez y Rivera, de especial importancia -y por ello nosotros lo ponemos en negrillas-, es que **"el valor agregado es el valor de la producción sin duplicaciones" y que constituye "el valor de los bienes destinados a la demanda final"**.

Sigamos en la explicación relacionada con los coeficientes. Existen dos tipos de coeficientes: técnicos y de requisitos directos e indirectos.

Los coeficientes técnicos indican que por cada colón que se produce en la agricultura se necesitan 10 centavos de insumos del mismo sector y 20 centavos de insumos industriales. El sector agrega valor por 70 centavos.

Los coeficientes de requisitos directos e indirectos indican la variación que se producirá en todos los sectores -los inmediatamente y los mediatamente relacionados- como consecuencia de un aumento en 1 de la demanda final de un determinado sector.

Rodríguez y Rivera suponen un aumento en la demanda final de la agricultura que pasa de 180 a 280, es decir un aumento de 100.

Este tipo de aumentos puede provenir, si seguimos los elementos componentes de la MIP 78, de aumentos en el consumo privado, en el consumo del gobierno, en la inversión o la formación bruta de capital fijo, en la variación de existencias o en el aumento de las exportaciones, por ejemplo.

CP + CG + FBKF + VE + X = DF

En el ejemplo de Rodríguez y Rivera, naturalmente, solo importa la variación en la demanda final. Y nos ilustran la reacción en cadena de la siguiente manera:

"1º- Repercusión directa de 100. Es el aumento de producción destinado a la demanda final.

2º- Primera serie de repercusiones indirectas. El cuadro de coeficientes técnicos nos dice qué monto de insumos de cada sector hace falta para producir 1 en el sector agrícola.
Como nos interesa producir 100 multiplicamos -la multiplicación es una suma repetida, dice Asimov,- los coeficientes por esta suma y hallaremos los insumos que comprará en cada sector. En el mismo sector agrícola comprará 10 (100 x 0.10) y en el industrial 20 (100 x 0.20).

3º- Segunda serie. Para producir los 10 del sector agrícola, comprará 1 en el mismo sector (10 x 0.10) y 2 en el industrial (10 x 0.20). Y el industrial, para producir sus 20 comprará 6 en el sector agrícola (20 x 0.30) y 1 en el sector industrial (20 x 0.05). En total el sector agrícola deberá producir 7 (1 para su propio sector y 6 para el sector industrial) y el industrial 3 (2 para el sector agrícola y 1 para su propio sector).

4º.- Tercera Serie. Para producir 7, el sector agrícola comprará insumos en el mismo sector por 0.7 (7 x 0.10) y en el industrial por 1.4 (7 x 0.20). A su vez, el industrial, para producir los 3 de la serie anterior, comprará 0.9 del sector agrícola (3 x 0.30) y 0.15 en el industrial (3 x 0.05). En total: el agrícola deberá producir 1.6 (0.7 + 0.9) y el industrial 1.55 (1.4 + 0.15).

5º.- Cuarta Serie. El sector agrícola, para producir 1.6 demandará 0.16 en el mismo sector (1.6 x 0.10) y 0.32 en el industrial (1.6 x 0.20). Y el industrial, para producir 1.55: 0.465 en el agrícola (1.55 x 0.30) y 0.08 en el industrial (1.55 x 0.05). En total: 0.625 de producción requerida al sector agrícola (0.16 + 0.465) y 0.40 (0.32 + 0.08) al industrial."

Añaden Rodríguez y Rivera que conforme se siga la cadena de repercusiones los montos requeridos de producción serán menores hasta desaparecer.

Y que el efecto total se obtiene por la suma, que en el caso del ejemplo, hasta la cuarta serie, de requisitos directos e indirectos, sería, para la producción agrícola:

100 + 10 + 7 + 1.6 + 0.625 = 119.225

De este valor, 100 son resultante de requisitos directos de producción y 19.225 provienen de repercusión indirecta.

Para la producción industrial, su incremento sería:

20 + 3 + 1.55 + 0.40 = 24.95

Monto que proviene de requisitos indirectos.

Esta es la lógica simple -en lo simple se oculta lo profundo- de los requisitos directos e indirectos. Esta lógica penetra el funcionamiento de las matrices, que no son tan simples como la de 2 (filas) x 2 (columnas) que Rodríguez y Rivera nos han puesto de ejemplo. En la MIP 78 se trabaja con 44 filas x 44 columnas.

Y ésa lógica es la que está incorporada en la matriz inversa, que es precisamente la que nos posibilita el cálculo de los requisitos directos e indirectos sin recurrir a inacabables operaciones.

Según nos aclaraba Héctor Quiteño (Facultad de Economía, UES) la matriz de requisitos directos e indirectos que se utiliza en los modelos de insumo-producto, es la inversa, no de la matriz tecnológica, sino de la matriz de Leontief. La matriz de Leontief resulta de restar la matriz tecnológica (A) de la matriz identidad (I), con lo que la matriz de coeficiente de requisitos directos e indirectos. sería: $(I-A)^{-1}$. Como sabemos, en la notación matricial el superindice -1 indica la inversa, y no un exponente o una potencia.

Los elementos explicativos relacionados con la matriz de Leontief los desarrollaremos en otro artículo. Nos concentraremos en lo sucesivo en el procedimiento para calcular la matriz inversa de la matriz tecnológica de nuestro ejemplo, procurando hacer algunos comentarios encaminados a la formulación de hipótesis.

5.- La Matriz Identidad como la Matriz Ideal

La matriz "ideal", teóricamente hablando, es aquella en que el producto o rama se autoabastece totalmente, es decir en aquel producto cuyo VBP sea producido por los insumos del mismo sector.

Naturalmente que esta es una suposición irreal; pero hay ciertas irrealidades que contribuyen a nuestra percepción de lo real.

La matriz que se construiría con un supuesto de que cada rama o producto se autoabastece, nos da una matriz, en la que la diagonal está constituida por el número 1. Y el resto de celdas por cero. Con propiedad, se llama a esta matriz, la **matriz identidad**. Nos explicaba el Ing. Fausto Anaya (Facultad de Economía, UES) que la identidad en matemáticas se entiende, como el elemento que operado con cualquier otro del conjunto, mediante una operación dada, lo deja inalterado. Por ejemplo, el cero en la suma, el 1 en la multiplicación. En álgebra matricial, la matriz identidad es aquella, que multiplicada por otra cualquiera, deja, a esta última, invariable.

La construcción de la matriz identidad no ha surgido, suponemos, de un planteamiento como el que realizamos para efectos explicativos de la MIP de la economía. Forma parte de la teoría del álgebra de matrices, pero nuestra consideración posibilita, nos parece, la comprensión de la utilidad de la matriz identidad.

La matriz identidad -identifica a cada columna y fila consigo misma, es la totalidad unitaria de la compra y la venta, podríamos decir-, para el ejemplo que pusieron Rodríguez y Rivera, sería:

	AGRICULTURA	INDUSTRIA
AGRICULTURA	1	0
INDUSTRIA	0	1

Ya hemos visto anteriormente que la matriz de coeficientes técnicos se calcula partiendo de la división del aporte de cada sector en la generación del VBP.

De manera que la llamada "matriz tecnológica" -la matriz que nos posibilita visualizar el aporte porcentual de cada rama en el VBP, la matriz parcial, diríamos, de requisitos directos- era:

	AGRICULTURA	INDUSTRIA
AGRICULTURA	0.10	0.30
INDUSTRIA	0.20	0.05

Tenemos en consecuencia una matriz tecnológica que nos posibilita observar el impacto en cada rama, de un aumento en 1 de la demanda final. Y tenemos una matriz identidad, que nos sirve de punto de referencia teórico para analizar, la situación perfecta en que todo aumento en la demanda final tiene a su vez una sola repercusión, en el propio y cada sector.

En palabras, tendríamos:

Matriz Tecnológica y (?) = Matriz Identidad

En una expresión simple de la situación podríamos decir que lo que le falta a la matriz tecnológica, para llegar a la matriz identidad, es su "inversa", el otro lado que la complementa.

No usamos el símbolo "(?)" y la letra "y" en el sentido matemático, sino literal. Tras la "y" se ocultan una serie de procedimientos algorítmicos que posibilitan el encuentro de la matriz inversa.

El principio consiste en tratar de hallar la matriz inversa, partiendo de dos matrices conocidas.

En el proceso la letra "y", se nos puede transformar en un signo "+", vale decir, la matriz tecnológica <u>más</u> la matriz inversa es igual a la matriz identidad.

Pero no estamos operando con números simples, sino complicados con el álgebra matricial en donde si bien los principios de la suma simple se mantienen, los procedimientos algorítmicos cambian.

Asimov ha demostrado que "la multiplicación es una suma repetida" y esta suma repetida, una complicación de la simple suma, es necesario tomarla en cuenta al momento de operar con series de números, que además, tienen también una notación literal y están agrupados en filas y columnas.

De forma tal que tenemos:

Matriz Tecnológica x Matriz Inversa = Matriz Identidad

Usualmente y de forma simbólica tenemos:

$$A\,A^{-1} = I$$

Pues bien, teniendo conocidos dos elementos de los tres en la ecuación (la matriz tecnológica y la matriz identidad) se trata de averiguar el tercer elemento constituido por la matriz inversa.

El procedimiento mecánico para averiguar la matriz inversa, ha sido simplificado por las computadoras. En efecto, en programas como Lotus o Quattro, se encuentran instrucciones para "matemáticas avanzadas" que multiplican o invierten matrices.

Una vez seleccionados los comandos de matrices -que es una operación sencilla y mecánica- de inversión o multiplicación, el procedimiento es también sencillo y mecánico, y consiste en marcar el rango de la matriz original y definir el rango en donde se desea presentar el resultado de la multiplicación o la matriz inversa.

De esta manera obtuvimos el siguiente resultado:

0.1	0.3		-0.90909	5.454545		1	0	Ag.
0.2	0.05	X	3.636364	-1.81818	=	0	1	In.
Ag.	In.		Ag.	In.		Ag.	In.	

Las dos primeras columnas expresan, como podrá notarse, la matriz original, tecnológica; las dos columnas centrales, la inversa y las dos columnas finales, compuestas de cero y uno, la matriz identidad.

Como dijimos, si multiplicamos la matriz original "A" por su inversa "A^{-1}" nos da la matriz identidad "I".

Recordemos que la matriz identidad, para efectos de nuestra expoción, es una matriz recurso, una matriz idealizada para acercarnos a la matriz inversa. Por ello, algunos comentarios de sus cálculos, los presentamos solamente en el intento de conocer la lógica de la construcción de la matriz inversa.

El costo total para producir 1 en la agricultura, se obtiene multiplicando los elementos del primer renglón de la matriz tecnológica por los elementos de la primera columna de la matriz inversa y sumándolos.

Razonando muy formalmente sobre los resultados presentados por la computadora podríamos decir, quizás, en una intepretación inicial y simple, que es la forma en que operan las compras para producir la unidad en el sector agrícola, con insumos tanto agrícolas como industriales, pero que se vende a sí mismo el sector agrícola.

$0.1\ (-0.90909) + 0.3\ (3.636364) = 1$

Es decir que el costo total del consumo intermedio, digamos, de cada unidad de producto y venta del sector agrícola, necesita 0.1 veces, compras de -0.90909 en la agricultura y 0.3 veces compras de 3.636364 en la industria.[4]

De manera similar, el costo total del consumo intermedio, para la producción de 0 en el sector agrícola, requiere, en el sector industrial y dados los coeficientes técnicos y la matriz inversa calculada, que en la agricultura se efectúen compras de 0.1 veces 5.454545 y compras de 0.3 veces -1.81818 en la industria.

$0.1\ (5.454545) + 0.3\ (-1.81818) = 0$

El costo total del consumo intermedio, para la producción de 0 en el sector industrial, requiere que en el sector agrícola, se efectúen compras de 0.2 veces -0.90909 en la agricultura y 0.05 veces 3.636364 compras en la industria.

$0.2\ (-0.90909) + 0.05\ (3.636364) = 0$

De igual manera, el costo total del consumo intermedio para la producción de 1 en el sector industrial, requiere que en el sector industrial, se efectúen compras de 0.2 veces 5.454545 en la agricultura y 0.05 veces -1.81818 en la industria.

$0.2\ (5.454545) + 0.05\ (-1.81818) = 1$

Tal es la "prueba" de la existencia de la matriz identidad y consecuentemente, de la matriz inversa.

En el ejemplo anterior, podrá notarse que ciertos cálculos para la generación de la unidad que se produce y se consume en el mismo sector agrícola y en el sector industrial, se presentan de manera negativa en la ecuación.

4 Para la exposición de la multiplicación de matrices en forma de compras, consumo, e insumos hemos tenido como referencia el método que utilizan Arya, Jagdish y Robin Lardner, MATEMATICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACION Y A LA ECONOMIA, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1987, p. 318. Primera edición en inglés: 1985.

Tenemos entendido que en la matriz de requisitos directos e indirectos -la inversa de la matriz de Leontief- ninguno de los coeficientes puede ser negativo, sino cero o mayor que cero. En la inversa de la matriz tecnológica de nuestro ejemplo , se presentan números negativos, como hemos visto.

Las irrealidades y números negativos de ciertas operaciones solamente se explican, nos parece, en función de un recurso operativo para encontrar la matriz inversa, para acercarse a la matriz de requisitos directos e indirectos y por la idealización de la matriz identidad.

6.- La Matriz Inversa a Través de Operaciones por Filas

Vistos los aspectos elementales relacionados con la matriz identidad, examinemos, así sea muy inicialmente, cierta lógica de construcción de la matriz inversa.[5]

El procedimiento más sencillo para encontrar la matriz inversa, opera como en una balanza, digámoslo muy simplificadamente.

Naturalmente que a diferencia de una balanza, no estamos operando con pesas, sino con números por lo que la metodología y el resultado es diferente.

Este método para encontrar la inversa a punta de balanza y pesas teóricas, se le llama, "operaciones por filas o de Gauss". Existe otro método para el cálculo de la matriz inversa llamado de la matriz adjunta.[6]

Nos ha parecido que este método de las operaciones por filas refleja sencillamente la construcción de la matriz inversa y lo preferimos para efectos de nuestra exposición, pues tratamos de buscar una explicación simple.

El método de las operaciones por filas, consiste en ir alterando de manera paralela y similar, tanto la matriz de coeficientes técnicos de nuestro ejemplo, como la matriz identidad.

La matriz tecnológica, ya la conocemos por la composición constatada en la contabilización de los insumos y el valor bruto de la producción y la matriz identidad, también ya la conocemos por ser la idealización de compras y ventas de los mismos sectores, de acuerdo a la interpretación que nosotros le hemos dado.

Transformamos las dos matrices, dándonos como resultante una tercera, que será la inversa.

Si con el mismo procedimiento simultáneo, transformamos la matriz tecnológica en otra matriz identidad; la matriz identidad la transformaremos en otra, que no será la matriz tecnológica, sino su complemento, su inversa, la parte que faltaba a la matriz tecnológica para llegar a la identidad.

Para probar los resultados, multiplicamos la matriz de coeficientes técnicos por su inversa, y nos dará nuevamente la matriz identidad, tal como hicimos en el apartado anterior.

Repitiendo, el procedimiento consiste en que teniendo en cuenta los fundamentos teóricos de las llamadas "operaciones matriciales por filas", aplicarlos en operaciones simultáneas a la matriz tecnológica y a la matriz identidad para encontrar la inversa.

Rodríguez y Rivera no explican la obtención de la matriz inversa, y acertadamente nos mencionan que este método matemático lo encontraremos en "cualquier texto que se ocupe de inversión de matrices".

No es un texto cualquiera el que hemos encontrado, aunque seguramente, contiene la explicación y los vacíos algorítmicos, que normalmente se presentan en otros textos que tratan sobre inversión de matrices.

Pero, pedagógicamente hablando, el libro de Earl K. Bowen, Profesor de Matemáticas del Boston College, tiene una cualidad didáctica.[7]

En dos apéndices sistematiza los elementos básicos de álgebra, fórmulas, ecuaciones y gráficas. Son un curso básico de matemáticas similar al que tuvimos en las "áreas comunes" de la década del 60 en la Universidad de El Salvador.

La forma sencilla de exposición posibilita el aprendizaje.

El tratamiento de los problemas que realiza Bowen, va

5 Debemos hacer mención del aporte del Ing. Fausto Salvador Anaya, especialmente y de otros compañeros del Departamento de Matemáticas y Estadística, en la elaboración de esta parte.

6 El método de la matriz adjunta para obtener la inversa, nos lo presenta el BCR "con fines ilustrativos en forma resumida". BCR, MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO 1978 DE LA ECONOMIA SALVADOREÑA, Impresos Litográficos de Centroamérica, 1986. p.p. 19-20.

7 Bowen, Earl K. MATHEMATICS With Applications in Management and Economics, Irwin, Illinois, 1972. Primera edición: 1962.

desde las ecuaciones lineales hasta las probabilidades pasando por los sistemas de ecuaciones lineales, desigualdades lineales, programación lineal, notación compacta, logaritmos, matemáticas financieras, cálculo diferencial, funciones, productos y cocientes, derivadas de exponenciales y funciones logarítmicas, cálculo integral.

En lo que hemos podido examinar, Bowen sigue un sistema de exposición que va de lo fácil a lo difícil, gradualmente, a fin de lograr una articulada comprensión de la temática tratada.

Sin embargo, como dijimos, existen "pasos" que nos dejan la interrogante del...¿porqué?. Esta pregunta existe en todo nivel del conocimiento y más cuando este es elemental, como el nuestro; pero también según Kline [8] debido a la incomprensión de los autores de los textos de la matemática moderna, que ellos mismos, en gran parte de los casos, no comprenden los nexos explicativos.

En todo caso, la explicación de la notación compacta y de la inversión de matrices, ha sido de considerable utilidad para nosotros, en el trabajo de Bowen, que hemos complementado con consultas a nuestros compañeros del Departamento de Matemáticas y Estadística.

Sigamos a Bowen (p.191), en la puntualización de las tres "operaciones elementales entre filas":

a) multiplicación (división) de una fila por una constante diferente de cero.

b) sumar una multiplicación de una fila a otra fila.

c) intercambio de dos filas.

Quizás, las operaciones de más fácil comprensión en las operaciones por filas, sean la a) y la c).

En efecto, resulta casi evidente, que si se divide o multiplica por la misma constante -diferente de cero- una fila de la misma posición en la matriz tecnológica y la matriz identidad, cierta relación entre las matrices se conserve, pues han sido alteradas en la misma dimensión.

De manera similar, se mantiene la relación entre las matrices, si se altera el orden de dos filas intercambiándolas en la misma posición, en ambas matrices.

Quizás resulte un poco más difícil comprender el procedimiento de sumar una multiplicación de una fila a otra fila.

Si recordamos que la multiplicación es una suma repetida, el punto de unidad de esta operación por filas, lo constituye la suma, en las dos matrices.

Pero veamos, aplicadamente, el método de operaciones por filas, en nuestro ejemplo.

Partimos del siguiente punto de comparación de matrices, en la dirección de convertir la matriz tecnológica en una matriz identidad que se nos presentará en el lado izquierdo, generando una tercera matriz, resultante de las transformaciones en la matriz identidad, situada al lado derecho.

MATRIZ TECNOLOGICA		MATRIZ IDENTIDAD ORIGINAL	
0.10	0.30	1	0
0.20	0.05	0	1

Realizaremos procedimientos de operaciones simples por filas, para convertir 0.10 en 1; 0.20 en 0; 0.05 en 1 y 0.30 en 0.

La primera operación consistiría en producir el 1 de la columna 1 y la fila 1, dividiendo la fila 1 en ambas matrices entre 0.10:

0.10/0.10 - 10; 0.30/0.10 - 3; 10/0.10 - 10; 0/0.10 - 0. Tenemos como resultante, las matrices alteradas, en un primer paso:

MATRIZ TECNOLOGICA TRANSFORMADA, PRIMER PASO		MATRIZ IDENTIDAD ORIGINAL TRANSFORMADA, PRIMER PASO	
1	3	10	0
0.20	0.05	0	1

8 Kline, Morris, EL FRACASO DE LA MATEMATICA MODERNA, POR QUE JUANITO NO SABE SUMAR, Siglo XXI, México, 1984, Primera edición en inglés: 1973.

La segunda operación la realizaríamos para encontrar el 0 en la columna 1, fila 2.

Aquí se aplica, curiosamente, el mismo procedimiento para encontrar las celdas con 0 de la matriz identidad: la suma -o resta- de la multiplicación de una fila con otra fila.

Para la fila 2, columna 1: 0.20 (1) - 0.2 = 0;

para la fila 2, columna 2: 0.20 (3) - 0.05 = 0.55;

para la fila 2, columna 3: 0.20 (10) - 0 = 2;

y para la fila 2, columna 4: 0.20 (0) - 1 = -1

Tenemos el segundo paso de la transformación:

MATRIZ TECNOLOGICA TRANSFORMADA,SEGUNDO PASO		MATRIZ IDENTIDAD ORIGINAL TRANSFORMADA, SEGUNDO PASO	
1	3	10	0
0	0.55	2	-1

El tercer paso de la transformación es sencillo, también curiosamente el mismo que se aplica para la obtención del 1 de la primera fila y columna. Como si los llamados "pivotes" o unos se obtuvieran por la simple división y los ceros, por la suma de la multiplicación de una fila con otra.

De manera que solamente dividimos las celdas de la segunda fila entre 0.55, de la manera siguiente:

0/0.55 = 0; 0.55/0.55 = 1; 2/0.55 = 3.636364; -1/0.55 = -1.81818

En consecuencia, tenemos:

MATRIZ TECNOLOGICA TRANSFORMADA,TERCER PASO		MATRIZ IDENTIDAD ORIGINAL TRANSFORMADA, TERCER PASO	
1	3	10	0
0	1	3.636364	-1.81818

Solamente nos queda un elemento de la matriz tecnológica por ser transformado para que esta se convierta en una matriz identidad. En el momento que este cambio completo de calidad de la matriz tecnológica opere, las transformaciones sufridas por la matriz identidad original, nos generaran la matriz inversa.

En el cuarto paso sucede la generación completa de la matriz inversa, en este caso de operaciones por filas.

En el cuarto paso, trataremos de convertir el 3 de la fila 1, columna 2, en 0.

Aplicando el procedimiento de la suma o resta de la multiplicación de una fila con otra, tenemos:

Para la fila 1, columna 2: 3 (1) - 3 = 0

Nótese, que, a diferencia de la misma suma de la multiplicación de una fila con otra fila, para encontrar el 0, de la segunda operación, se invierte el orden de la fila restada, en este cuarto paso. Se pueden realizar esos cambios, toda vez que el mismo procedimiento sea aplicado a toda la primera fila, en ambas matrices: el balance operativo se mantiene.

Para la fila 1, columna 1: 3 (0) - 1 = -1

Aquí nos ha ocurrido un problema. La matriz identidad que buscamos, por lógica debe contener números positivos, en cambio, nuestro resultado, nos da un número negativo. Procedemos, en consecuencia, a transformarlo, multiplicando por -1:

-1 (-1) = 1

Para no alterar el balance operativo de las operaciones por filas, tenemos que introducir la multiplicación por -1 en todas las operaciones que estamos realizando. De manera que en las dos que llevamos, tenemos:

-1 [3 (1) - 3] = 0 y -1 [3 (0) -1] = 1

Para la fila 1, columna 3: -1 [3 (3.636364) -10] = -0.90909

y para la fila 1, columna 4: -1 [3 (-1.81818) - 0] = 5.454545

De suerte que, al final tenemos la matriz inversa:

MATRIZ IDENTIDAD RESULTANTE DE LA MATRIZ TECNOLOGICA TRANSFORMADA		MATRIZ INVERSA RESULTANTE DE LA MATRIZ IDENTIDAD ORIGINAL TRANSFORMADA	
1	0	-0.90909	5.454545
0	1	3.636364	-1.81818

7.- Hacia un Nuevo Estudio de la Matemática

El conocimiento del funcionamiento lógico de la matriz inversa es de cardinal importancia en la construcción de un modelo económico. Se relaciona, como vimos, con la secuencia de repercusiones en toda la economía nacional, al aumentar la demanda final.

Decirlo resulta fácil, comprenderlo resulta difícil, es decir, si queremos entender con alguna profundidad.

Nosotros solamente hemos examinado, el que nos parece el método más simple de la construcción de la matriz inversa, con el propósito de explicarnos, inicialmente, la forma de su construcción. Quedan otros elementos más complejos del álgebra matricial relacionados con la temática tratada.

La obtención de la matriz inversa y la multiplicación de matrices, son una cuestión sencilla, ahora que contamos con los computadores personales. No tardamos ni diez minutos en hacer la multiplicación y la inversión de la matriz, en Lotus o en Quattro.

La misma cuestión de la multiplicación e inversión de matrices, nos llevó un par de meses -tratando de averiguar las conexiones lógicas-.

Y todavía nos quedan, como es evidente, pendientes de explicación una serie de aspectos, que tratamos por definición, o por "la práctica con los números" -que no es la teoría de los números-.

Nosotros no quisimos dar por sentado el conocimiento, así sea inicial, de la multiplicación y la inversión de matrices. Ni los elementos de su importancia para el análisis económico. Por ello hemos realizado este modesto recorrido.

En el proceso hemos estudiado un poco de historia, filosofía y lógica matemática y hemos comprobado en una primera aproximación, algunas hipótesis que teníamos cuando estudiantes, sobre ciertas debilidades de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en nuestra Universidad. Enseñanza algorítmica y no matemática, decía el profesor Manuel Arévalo.

Por ejemplo, realizamos operaciones matriciales mecánicamente, sin conocer las causalidades y aplicaciones y lógicamente, operamos algorítmicamente con menos precisión que la computadora. El conocimiento matemático, no lo da, ni lo tiene, la computadora, aunque haga gala de operaciones algorítmicas, como también lo hacen algunos profesores y alumnos.
No es un "mea culpa". Consideramos que debe ser un señalamiento colectivo, que incluye profesores y alumnos, textos, examenes, y la historia de nuestra reforma universitaria, específicamente nuestra concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las deficiencias de la enseñanza y el aprendizaje de la llamada matemática moderna, estan también en ella misma, en su incomprensión, como dice Kline.

En los Estados Unidos, desde principios de la década del 70, Kline ha iniciado, nos parece, una sistematica crítica a la estructura, además de la pedagogía, de la matemática moderna.

Todavía nosotros desconocemos estos aportes, que sería necesario asimilarlos e incorporarlos en nuestra reforma curricular.

Trataremos de presentar algunas reflexiones al respecto en otra oportunidad.●

ANEXO

EL SALVADOR MIP 1978

EXCEDENTE NETO DE EXPLOTACION