La teoría APOE: un marco actual para la investigación e innovación en educación matemática en el nivel superior

Martín Enrique Guerra Cáceres
Maestro en Ciencias
en la especialidad de matemáticas aplicadas
martin.guerra@ues.edu.sv

http://orcid.org/0000-0002-7177-8835
El Salvador

Introducción

En este trabajo se presentan los conceptos fundamentales de la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), una teoría cognitiva del aprendizaje de las matemáticas propuesta por el matemático Ed Dubinsky y colaboradores en la década de los 80, que extiende el concepto de Piaget sobre la abstracción reflexiva al estudio de la cognición de conceptos matemáticos en el nivel universitario y remite la explicación del comportamiento matemático de los estudiantes a entidades y procesos de naturaleza mental que conforman una estructura cognitiva mediadora -o estructura de representación- que se desarrolla a partir de la habilidad del sujeto de percibir las cosas, actuar sobre ellas, reflexionar sobre esas acciones y estructurarlas.

En el proyecto de tesis que se lleva a cabo en el programa de Doctorado en Educación de la Facultad Multidisciplinaria de Occidente de la Universidad de El Salvador: "Construcción de un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una ecuación diferencial de primer orden", se ha adoptado la teoría APOE puesto que, entre las diferentes perspectivas teóricas que coexisten en el Pensamiento Matemático Avanzado (Dreyfus, 2002; Tall, 2002, 2005), ella proporciona un marco teórico y metodológico que permite, por una parte, dar cuenta de la manera en que los estudiantes comprenden y se vuelven competentes en el uso de los conceptos y, por otra, diseñar situaciones de aprendizaje que permiten enriquecer los esquemas de los estudiantes en diversas áreas de las matemáticas en el nivel superior.

Por otra parte, existe una importante comunidad de investigadores en Educación Matemática que aplica la teoría APOE para investigar sobre el aprendizaje de conceptos fundamentales en varias áreas de las matemáticas como cálculo, análisis matemático, álgebra lineal, álgebra abstracta, combinatoria, lógica matemática, etc. (Fuentealba et al., 2022; Oktaç, 2022; Montenegro y Podevils, 2021; Diarmaid-Hyland, 2019; Martínez-Planell y Trigueros, 2019; Arnon et al., 2014; Buendía y Cordero, 2013; Clark, 1997), lo que hace que este paradigma de investigación sea de actualidad y relevancia.

1. Desarrollo

1.1 Ideas piagetianas generales

El trabajo de Piaget se concentró en el desarrollo del conocimiento y pensamiento lógico-matemático infantil, desde el nacimiento hasta la adolescencia. Sin embargo, Ferreiro (1999), en un trabajo sobre la adquisición de la lengua escrita, expresa que los principios de la epistemología genética son relevantes en cualquier otra disciplina que se preocupe por la cuestión de la génesis de los objetos socioculturales y el acceso al conocimiento: “la teoría de Piaget es una teoría general de procesos de construcción de conocimiento, desarrollada en torno a la problemática de los objetos físicos y lógico-matemáticos, pero al menos potencialmente apta para dar cuenta de la construcción de otros tipos de objetos” (p.15). Por su parte, Dubinsky (2002) plantea que es plausible extender los principios piagetianos para describir la epistemología y estudiar la cognición de los conceptos matemáticos en los niveles avanzados. Y Coll (2012) reflexiona sobre la vigencia actual en educación de muchas de las ideas de Piaget y de la Escuela de Ginebra. Por tanto, a continuación, a manera de preámbulo, se exponen las ideas piagetianas que están a la base de la teoría APOE.

Piaget (1978) afirma que el punto de partida del proceso cognoscitivo son las acciones: “... la acción es constitutiva de todo conocimiento. El conocimiento es dependiente de la acción y la acción es productora de conocimiento (...) solamente la coordinación de los esquemas de acción permitirá dar unidad a los objetos” (p. 15). La noción de esquema expresa “el conjunto estructurado de los caracteres generalizables de la acción, es decir de aquellos que permiten repetir la misma acción o aplicarla a nuevos contenidos” (p.16). En consecuencia, la construcción de significados y el aprendizaje de un concepto matemático debe estar basado en la acción del sujeto cognoscente sobre el objeto conocido y la coordinación de los esquemas vinculados a ese concepto.

También es cierto que la significación dada a un objeto está condicionada social e históricamente, pero la forma en la cual tal significación es adquirida depende en esencia de los mecanismos cognoscitivos del sujeto: “cómo un sujeto asimila un objeto, depende del sujeto mismo; qué es lo que él asimila depende, al mismo tiempo, de su propia capacidad y de la sociedad que le provee la componente contextual de la significación del objeto” (Piaget y García, 2004, p. 245).

Por tanto, la estructura cognoscitiva de una persona es la forma o patrón que toma la cognición de esa persona en un momento dado. Y lo que permite caracterizarla son las leyes de composición a la que están sometidos sus elementos. La estructura cognitiva tiene tres propiedades básicas: de totalidad, de transformaciones y de autorregulación. La totalidad se refiere a que ella tiene propiedades distintas de las que caracterizan a los elementos, propiedades que son la resultante de las relaciones o composiciones entre los elementos. Las leyes de composición que caracterizan a una estructura son a la vez estructuradas y estructurantes. Todas las estructuras que conforman la cognición humana tienen una génesis a partir de alguna estructura anterior. Por medio de procesos de transformación constructiva, las estructuras más simples van siendo incorporadas en otras de orden superior (Piaget y García, 2004, p. 246).

Piaget distingue dos tipos de estructuras cognitivas: los esquemas y las operaciones. Los esquemas corresponden a las unidades básicas de la estructura cognitiva de la persona y pueden ser definidos como una serie de contenidos cognitivos relacionados, que están estrechamente entrelazados y que tienden a activarse unos a otros. Los esquemas no son moldes rígidos en los cuales el sujeto encaja la realidad, sino que son entramados relativamente flexibles que varían para ajustarse a contenidos diversos. Los esquemas no suelen quedarse aislados, sino que se coordinan con otros para formar esquemas más complejos.

Las operaciones corresponden a acciones interiorizadas, reversibles, agrupadas en sistemas de conjunto con leyes de totalidad. El sujeto no requiere actuar físicamente sobre el objeto, sino que puede representarse una imagen mental de la acción en cuestión. Las operaciones en las cuales las acciones interiorizadas tienen como objeto imágenes de objetos materiales reciben el nombre de operaciones concretas. Y las que operan sobre otras acciones interiorizadas más básicas se llaman operaciones formales.

Piaget propone dos invariantes funcionales a la base de la cognición humana: la organización, que trata de responder al problema de la conservación de la identidad a lo largo de la ontogenia, y la adaptación, que trata de responder al problema de cómo es posible la transformación del organismo en su interacción con el medio, con conservación de la organización. La dinámica del desarrollo cognitivo se explica a través de un constante proceso de equilibración entre las dos fuerzas que permiten la adaptación: la asimilación y la acomodación. Toda asimilación implica cierto grado de acomodación y viceversa. La asimilación corresponde a la atribución de significados e integración de los objetos en los esquemas de acción, produciéndose una extensión del entorno y del poder de la cognición para actuar sobre dicho entorno. La asimilación no depende solo del sujeto, sino que también influye la adecuación o compatibilidad entre los elementos y la estructura que pretende asimilarlos. En caso de que no exista esta compatibilidad hay dos vías de acción. O bien la naturaleza del objeto se encuentra muy fuera del ámbito de cosas asimilables en ese esquema, o bien el objeto está lo suficientemente cerca de lo asimilable. En este último caso, al efectuarse una modificación en la estructura que amplíe sus límites, el objeto puede ser asimilado. Esta modificación en la estructura para ajustarse a las características del elemento externo es denominada acomodación. En la acomodación se produce un enriquecimiento de la estructura con la aparición de nuevas subestructuras diferenciadas que permite una flexibilización de la estructura original. La asimilación hace referencia a tres niveles dependientes de la naturaleza de lo que se asimila. Un primer nivel corresponde a la asimilación de un objeto exógeno al esquema y la acomodación recíproca de éste al primero. El segundo nivel se refiere a la asimilación recíproca entre esquemas de acción. Y el tercer nivel implica la diferenciación en subsistemas al interior de una estructura como resultado de la acomodación. Estos subsistemas se integran por asimilación recíproca en una nueva totalidad de nivel superior.

1.2 La teoría APOE

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un modelo cognitivo basado en el concepto de abstracción reflexiva -introducido por Piaget para describir la construcción de estructuras cognoscitivas lógico-matemáticas- que permite describir la epistemología y estudiar la cognición de los conceptos matemáticos en el nivel universitario. Se postula que la construcción del conocimiento matemático en la estructura cognitiva de una persona pasa por cuatro estructuras mentales básicas, no necesariamente secuenciales, denominadas: acción, proceso, objeto y esquema, las cuales son alcanzadas debido a la activación de mecanismos mentales tales como la interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión (Trigueros, 2005).

1.3 La abstracción reflexiva

La abstracción reflexiva es el proceso cognitivo de reconstrucción con combinaciones nuevas que permite la integración de estructuras mentales de niveles inferiores en una estructura más rica de nivel superior, a partir de la coordinación de las acciones interiorizadas del sujeto sobre un objeto (que puede ser físico o mental). El sujeto a partir de la coordinación de sus acciones sobre los objetos puede inferir propiedades y relaciones de los objetos, separar la forma de su contenido, representar y organizar esta información en un nivel superior de pensamiento (Piaget, 1979).

En la abstracción reflexiva hay dos mecanismos inseparables: por una parte, una proyección de lo que ha sido derivado de un nivel inferior a uno superior (por ejemplo, de la acción a la representación) y, por otra, una acomodación interna que permite una reorganización sobre el nuevo nivel de lo que ha sido transferido por la proyección. Estos mecanismos se activan a partir de las acciones físicas o mentales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento. De manera que la abstracción reflexiva permite la formación de generalizaciones completivas que constituyen síntesis nuevas en el seno de las cuales las leyes particulares adquieren nuevas significaciones (Piaget, 1979, págs. 5, 249; Piaget y García, 2004, p. 248).

Por tanto, la abstracción reflexiva se refiere a todas las formas y actividades cognitivas del sujeto (coordinación de acciones, operaciones, mecanismos y estructuras o esquemas) para extraer de los esquemas cognitivos previos ciertos caracteres y poder aplicarlos en la resolución de nuevas tareas o problemas. En su forma más avanzada, la abstracción reflexiva conlleva a la clase de pensamiento matemático que permite separar los procesos de su contenido y convertir los procesos mismos en objetos.

Así la abstracción reflexiva se muestra como una descripción del mecanismo del desarrollo intelectual. También, en esta dinámica del desarrollo puede apreciarse ese mecanismo más general que se encuentra tanto en la psicogénesis como en la historia del pensamiento matemático: la triada dialéctica que conduce de lo intra-objetal o análisis de los objetos, a lo inter-objetal, es decir, al estudio de las relaciones y transformaciones entre dichos objetos, y de allí a lo trans-objetal o estudio de las estructuras construidas tomando como soporte dichas transformaciones (Piaget y García, 2004).

En este sentido, Dubinsky (2002, p.101-102), retomando los hallazgos de Piaget, propone cinco tipos de abstracción reflexiva que considera son sumamente importantes en el desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado:

- La interiorización: que consiste en trasladar o traducir una sucesión de acciones materiales sobre un objeto cognitivo a un sistema de operaciones interiorizadas, o construcción mental de un proceso interno referente a una serie de acciones sobre dicho objeto que pueden ser ejecutadas en la mente, sin necesidad de pasar por todos los pasos específicos.
- La coordinación: acto cognitivo de construir un nuevo proceso a partir de dos o más procesos. Esta construcción puede realizarse por simple concatenación.
- La encapsulación: esto es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático), o la tematización de un esquema.
- La generalización: acción cognitiva que se presenta cuando el sujeto aprende a aplicar un esquema preexistente a una amplia colección de fenómenos. Esto puede ocurrir porque el sujeto se vuelve consciente de la extensa aplicabilidad del esquema. El esquema no cambia, no obstante, ahora posee una amplia aplicabilidad.
- La reversión: esta acción cognitiva se da cuando el sujeto es capaz de construir un nuevo proceso, a partir de un proceso que ya existe internamente, invirtiendo un proceso interiorizado (desencapsular o destematizar).

1.4 Acciones, procesos, objetos y esquemas

En la teoría APOE, la comprensión de un concepto matemático comienza con acciones físicas o mentales sobre un objeto previamente construido. Cuando se adquiere un control consciente de la acción, entonces esta puede ser interiorizada para formar un proceso. Y cuando se adquiere conciencia de la totalidad del proceso, este es encapsulado en un objeto. Los objetos pueden ser desencapsulados para volver a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en totalidades llamadas esquemas.

En Arnon et al. (2014, pp. 18-26) encontramos las siguientes definiciones de los términos acción, proceso, objeto y esquema, así como de las respectivas concepciones.

- Acción y concepción de acción. Una acción es una transformación guiada por indicaciones externas que el sujeto realiza sobre un objeto siguiendo una secuencia de instrucciones paso a paso, de manera que cada paso necesita ser realizado explícitamente para desencadenar el paso siguiente. Una persona tiene una concepción de acción de un concepto matemático si su nivel de habilidad se limita a la ejecución explícita paso a paso de las operaciones implicadas en ese concepto. Un ejemplo de acción es resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden (EDOPO) siguiendo el método de variables separables. El sujeto tiene una concepción de acción de la resolución de una EDOPO si calcula la solución aplicando paso a paso las reglas de dicho método. La concepción de acción es necesaria para el desarrollo de otras estructuras y, dependiendo del contexto, una acción puede ser básica o compleja. Un sujeto con un mayor nivel de desarrollo puede realizar una acción si así lo considera apropiado, sin estar supeditado a ella.

- Proceso y concepción de proceso. Cuando el sujeto reflexiona sobre la acción, entonces puede hacer una construcción interna de la acción que no está dirigida por instrucciones externas. Se dice entonces que la acción ha sido interiorizada en un proceso. De otra manera, un proceso es una acción interiorizada. Una persona que ha construido un proceso tiene un control consciente sobre todos y cada uno de los pasos de una acción, sin necesidad de recurrir a representaciones ostensivas de ellos. Una persona tiene una concepción de proceso de un concepto si su nivel de habilidad se limita a concebir los procesos correspondientes implicados en dicho concepto. Por ejemplo, una persona tiene una concepción de proceso de la resolución de una EDOPO si puede encontrar la solución aplicando dos o más métodos, pero no puede resolver la ecuación si no cuenta con una expresión algebraica explícita. Una vez que se ha construido un proceso, este puede ser transformado de varias formas. Un proceso puede ser revertido o puede ser coordinado con otros procesos.

- Objeto y concepción de objeto. Cuando el sujeto es consciente del proceso como una totalidad, puede entonces pensar y actuar sobre él como un todo, realizando, si así fuera requerido, las acciones o procesos implicados. Se dice que el sujeto ha construido un objeto cognitivo para el correspondiente proceso, o que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. También cuando el sujeto reflexiona sobre un esquema y toma conciencia del esquema como una totalidad, entonces es capaz de realizar acciones sobre ese esquema. Se dice que el sujeto ha tematizado el esquema en un objeto. Una persona tiene una concepción de objeto de un concepto matemático cuando puede realizar acciones sobre ese concepto y es capaz de desencapsular los procesos correspondientes que condujeron al objeto si fuera necesario. En el caso de un esquema tematizado, una persona tiene una concepción de objeto de un esquema cuando puede destematizarlo en sus diversos componentes. Por ejemplo, un sujeto tiene una concepción de objeto para la regla de la cadena si es capaz de deducir la regla de Leibniz.

- Esquema. Un esquema, para cierta parcela de las matemáticas, es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados en la mente de la persona en una estructura coherente, que puede ser evocado para enfrentar una situación problema. La coherencia de un esquema permite decidir si algo está o no al alcance del esquema. Los mismos esquemas pueden ser tratados como objetos y formar parte de un esquema de nivel superior (tematización de un esquema). Por ejemplo, el esquema de espacio de funciones puede ser aplicado a conceptos como espacio dual, espacio de transformaciones lineales y álgebra de funciones. Dicho de otra manera, un esquema es una estructura cognitiva coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas previamente construidos. Por ejemplo, un esquema para la resolución de una EDOPO puede incluir solo métodos algebraicos o puede incluir métodos gráficos o geométricos, para encontrar la solución.

Piaget y García (2004) señalan que el desarrollo de un esquema puede describirse por medio de tres niveles que están presentes en la construcción de relaciones entre los elementos constitutivos de un esquema: intra-nivel, inter-nivel y trans-nivel. El intra-nivel se caracteriza por la construcción de relaciones y propiedades aisladas y particulares de acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. En el nivel inter se establecen y justifican transformaciones entre las relaciones construidas en el nivel intra. Estas transformaciones, a la vez, demandan el establecimiento de vínculos entre ellas, lo que nos lleva a la construcción de las estructuras características del trans-nivel. En este nivel, la persona ha construido una estructura que le permite entender las relaciones construidas en el inter-nivel y puede trabajar con el esquema de una manera mucho más flexible que cuando lo está en los otros dos niveles. El esquema no permanece inmóvil, sino que constantemente está enriqueciéndose mediante nuevas relaciones y transformaciones con otros objetos y esquemas.

1.5 Descomposición genética

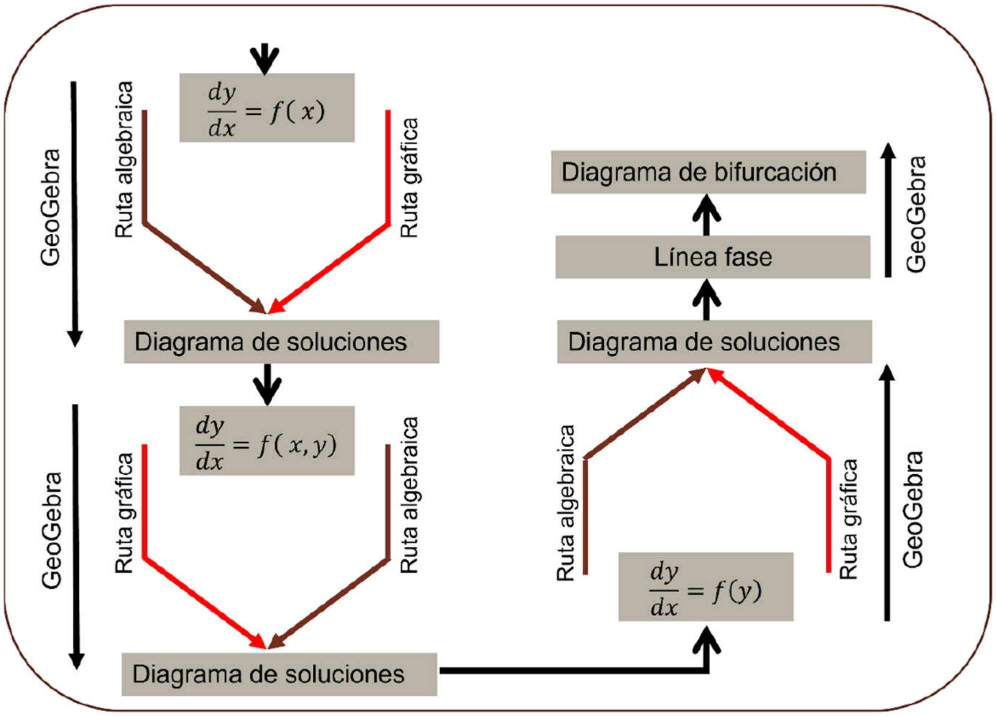
Las ideas de lo que significa comprender un concepto matemático y cómo se accede al conocimiento cuando se lo necesita están contenidas en Dubinsky (1996): "El conocimiento matemático de una persona es su tendencia a responder ante una situación matemática problemática reflexionando sobre ella en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar esa situación". (pp. 32-33). El término tendencia se refiere a la movilización de conexiones entre los constructos mentales y la forma de usarlas para tratar con la dicotomía desequilibración/reequilibración presente en la situación problemática.

El primer paso para aplicar la teoría APOE en el estudio de la comprensión y aprendizaje de un concepto matemático es proponer un modelo inicial en el que se describe cómo se desarrolla el concepto en la mente de un individuo. Este modelo de cognición es llamado descomposición genética del concepto. De otra manera, una descomposición genética para un concepto matemático es una descripción de los constructos cognitivos que un individuo debe hacer para comprender y poder manejar con flexibilidad el concepto en cuestión, destacando las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas y mecanismos que se consideran necesarios en el aprendizaje de ese concepto matemático.

Una descomposición genética no tiene por qué ser única. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto. Lo importante es que cualquier descomposición genética sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto y sea una guía para el aprendizaje de ese concepto. En la literatura se pueden encontrar descomposiciones genéticas para muchos conceptos de cálculo, álgebra lineal, álgebra abstracta, lógica, etc. (Montenegro y Podevils, 2021; Martínez-Planell y Trigueros, 2019; Arnon et al, 2014).

A continuación, se presenta un ejemplo de una descomposición genética del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Esta se describe de manera gráfica en la Figura 1.

Figura 1. Esquema gráfico-algebraico para $dy/dx = f(x, y)$.



Elaboración propia.

1. Conocimientos previos

Objetivo: coordinar las representaciones gráfica y algebraica de los objetos función y función derivada para superar la necesidad de contar con una fórmula para tratar con una función.

1.1 Acción de coordinar las propiedades de la primera y segunda derivadas de una función para construir la gráfica de esa función cuando:

1.1.1 La función derivada está dada mediante una expresión algebraica.

1.1.2 La función derivada está dada mediante una gráfica.

1.1.3 Se conocen una serie de propiedades analíticas sobre la función, la primera y segunda derivadas.

1.2 Acción de obtener relaciones entre una función y sus derivadas aplicando conocimientos previos: cálculo de antiderivadas, regla de la cadena, derivación implícita, regla de Leibnitz, etc.

1.3 Interiorizar las relaciones y las coherencias entre la representación gráfica de una relación en el plano y el espacio -obtenida, por ejemplo, mediante GeoGebra- y las propiedades deducidas de la representación algebraica.

2. Resolución de EDOPO elementales

Objetivos: desequilibrar el esquema simbólico del cálculo de antiderivadas y realizar acciones y procesos en los registros algebraico y gráfico para resolver EDOPO elementales.

2.1 Acción de resolver una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{dy}{dx}=f(x)$ usando simple inspección, antiderivadas o técnicas de integración, y comprobar que la fórmula obtenida satisface la ecuación.

2.2 Acción de representar gráficamente la familia de soluciones obtenida en 2.1 usando GeoGebra. Esta representación se llama diagrama de soluciones.

2.3 Acción de resolver problemas de valor inicial de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x),\ y(x_0)=y_0$ $\frac{dy}{dx}=f(x),\ y(x_0)=y_0$, usando técnicas de integración y determinando el intervalo más grande donde está definida esa solución.

2.4 Acción de dibujar en el diagrama obtenido en 2.2 la solución del problema de valor inicial obtenido en 2.2.

2.5 Interiorizar 2.1 y 2.2 en un proceso algebraico que permite obtener el diagrama de soluciones -usando la fórmula de la solución- y visualizar ese diagrama como una unión de curvas solución.

2.6 Interiorizar en un proceso algebraico la acción de dibujar el diagrama de soluciones de $\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{dy}{dx}=f(x)$ sin resolver la EDOPO, donde $f:I\subset\mathbb{N}\to\mathbb{R}f:I\subset\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ es una función dada mediante una fórmula.

2.7 Interiorizar en un proceso gráfico la acción de dibujar el diagrama de soluciones de $\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{dy}{dx}=f(x)$, donde $f:I\subset\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $f:I\subset\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ es una función dada mediante una gráfica.

2.8 Encapsular 2.6 y 2.7 en un objeto -llamado diagrama de soluciones- que permite representar las soluciones de una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{dy}{dx}=f(x)$, reflexionando sobre la complementariedad de los procesos algebraico y gráficos utilizados en 2.6 y 2.7, respectivamente.

2.9 Construir un esquema grafico-algebraico para la resolución de una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x)$ $\frac{dy}{dx}=f(x)$, mediante la construcción del diagrama de soluciones: unión de curvas solución de la misma forma y que no tienen puntos en común. El objeto diagrama de soluciones se puede construir a partir del conocimiento de $f(x)f(x)$, la cual puede estar dada mediante una fórmula o una gráfica.

2.10 Resolver EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(y)$ $\frac{dy}{dx}=f(y)$, usando simple inspección, antiderivadas o propiedades de funciones conocidas y comprobando que la fórmula obtenida satisface la ecuación.

2.11 Reflexionar sobre el papel que juegan las variables x,yx,y en las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{dy}{dx}=f(x)$ y $\frac{dy}{dx}=f(y)\frac{dy}{dx}=f(y)$, así como sobre las propiedades de las soluciones correspondientes.

3. Interpretación geométrica de una EDOPO: campo de pendientes o campo de direcciones

Objetivos: interpretar geométricamente una EDOPO y dibujar el campo de pendientes.

3.1 Acción de interpretar geométricamente $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, como un campo de pendientes.

3.2 Acción de obtener los valores de las pendientes de las soluciones de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ en una malla dada, usando una hoja de cálculo.

3.2.1 Establecer diferencias entre los campos de pendientes de las EDOPO $\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{dy}{dx}=f(x)$ y $\frac{dy}{dx}=f(x)\frac{dy}{dx}=f(x)$.

3.3 Acción de dibujar el campo de pendientes de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, usando GeoGebra.

3.3.1 Implementando la noción de campo de pendientes por medio de una secuencia de comandos de GeoGebra.

3.3.2 Aplicando el comando de GeoGebra "CampoDirecciones".

3.4 En el campo de pendientes obtenido en 3.3, describir verbalmente e interiorizar el comportamiento de las soluciones.

4. Estudio gráfico de una EDOPO

Objetivo: construir una ruta gráfica para dibujar el diagrama de soluciones de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, sin necesidad de contar con una fórmula explícita para las soluciones, movilizando los conocimientos previos.

4.1 Acción de determinar en qué regiones del plano se cumple el teorema de existencia y unicidad y cuáles son las implicaciones en el diagrama de soluciones.

4.2 Acción de dibujar el campo de pendientes de $\frac{dy}{dx}=f(x,y$ $\frac{dy}{dx}=f(x,y$, usando GeoGebra, y describir verbalmente el comportamiento de las soluciones.

4.3 Acción de deducir las propiedades cualitativas de las soluciones de la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$: monotonía, concavidad, extremos, puntos de inflexión, simetrías, etc. y determinar los subconjuntos del plano dónde dichas propiedades se cumplen.

4.4 Coordinar los subconjuntos obtenidos en 4.3 e interiorizar la acción de hacer un bosquejo manual del diagrama de soluciones.

4.5 Acción de dibujar el diagrama de soluciones de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, usando GeoGebra.

4.6 Establecer la coherencia entre 4.3, 4.4 y 4.5.

4.7 Interiorizar 4.1-4.6 en un proceso gráfico-algebraico para resolver $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

4.8 Encapsular 4.7 en un objeto -llamado diagrama de soluciones- que permite representar las soluciones de una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

4.9 Construir un esquema grafico-algebraico para resolver una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ mediante la construcción del diagrama de soluciones.

5. Estudio algebraico de una EDOPO

Objetivo: Construir una ruta algebraica para dibujar el diagrama de soluciones de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, usando EDOPO lineales y de variables separables.

5.1 Acción de resolver EDOPO lineales y de variables separables de manera algebraica comprobando que la fórmula obtenida satisface la ecuación.

5.2 Acción de usar GeoGebra para representar gráficamente la familia de soluciones obtenida en 5.1.

5.3 Interiorizar 5.1 y 5.2 en un proceso algebraico para resolver $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

5.4 Encapsular 5.3 en un objeto -llamado diagrama de soluciones- que permite representar las soluciones de una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

6. Estudio gráfico y algebraico de una EDOPO

Objetivo: resolver una EDOPO lineal o de variables separables siguiendo las rutas gráfica y algebraica descritas en 4 y 5.

6.1 Dada una EDOPO lineales o de variables separables, encontrar de manera algebraica la solución y, a partir de esta, dibujar el correspondiente diagrama de soluciones.

6.2 Considerando la EDOPO dada en 6.1, resolverla de manera gráfica siguiendo el procedimiento establecido en 4.1-4.6.

6.3 Interiorizar 6.1 y 6.2 en un proceso gráfico-algebraico para resolver $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

6.4 Encapsular 6.3 en un objeto -llamado diagrama de soluciones- que permite representar las soluciones de una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

6.5 Construir un esquema grafico-algebraico para resolver una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ mediante el correspondiente diagrama de soluciones.

7. Estudio gráfico y algebraico de EDOPO autónomas

Objetivo: determinar el comportamiento de las soluciones de EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx} = f(y)$ $\frac{dy}{dx} = f(y)$ siguiendo las rutas algebraica y grafica descritas en 4 y 5.

7.1 Dada una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(y)$ $\frac{dy}{dx} = f(y)$ determinar las soluciones de equilibrio.

7.2 Considerando la EDOPO dada en 7.1, resolverla siguiendo el procedimiento establecido en 6.1 y 6.2.

7.3 Interiorizar 7.2 en un proceso gráfico-algebraico para resolver $\frac{dy}{dx} = f(y)\frac{dy}{dx} = f(y)$.

7.4 Encapsular 7.3 en un objeto -llamado diagrama de soluciones- que permite representar las soluciones de una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx} = f(y)\frac{dy}{dx} = f(y)$.

7.5 Construir un esquema grafico-algebraico para resolver una EDOPO de la forma $\frac{dy}{dx} = f(y)$ $\frac{dy}{dx} = f(y)$ mediante el diagrama de soluciones.

7.6 Acción de dibujar la línea de fase de una EDOPO autónoma.

7.7 Acción de construir el diagrama de bifurcación de una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(y, \mu)$ $\frac{dy}{dx} = f(y, \mu)$, con $\mu\mu$ un parámetro real.

2. Situación problemática

En el proceso de enseñanza y aprendizaje tradicional de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden (EDOPO), el estudio de los métodos gráficos, junto con la necesaria coordinación de los métodos algebraicos, tiene un tratamiento marginal o es inexistente. En consecuencia, en los esquemas de los estudiantes se considera como información relevante solo la información suministrada en la ecuación diferencial que les conduce a aplicar unos algoritmos determinados para encontrar una fórmula para la solución. La investigación educativa señala que, para modificar la fuerte tendencia del sistema didáctico hacia los métodos algebraicos, la instrucción debería promover y legitimar el uso de diferentes sistemas de representación, la reflexión de los aspectos asociados al concepto de solución, los procedimientos de solución, los significados y conexiones entre las representaciones utilizadas. Ello podría permitir que los estudiantes tengan una visión más amplia del concepto de solución de una ecuación diferencial, que no estaría limitada al uso de ciertos procedimientos simbólicos que son olvidados fácilmente (Camacho et al, 2012a, 2012b). Sin embargo, en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias permanece abierta la cuestión de cómo enfrentar y superar de manera efectiva la tendencia fuerte del estudiantado hacia los métodos algebraicos (Raychaudhuri, 2008, 2013, 2014).

En el proyecto de tesis se propone como alternativa un enfoque gráfico-algebraico del proceso de estudio y de resolución de una EDOPO que promueve la integración y coordinación de las representaciones gráfica y algebraica de las soluciones de una EDOPO, a través de la actividad instrumentada usando GeoGebra. Lo que se persigue con este enfoque es que el estudiante cuando se enfrente a una EDOPO, no solo un vea un símbolo que relaciona una función y sus derivadas, y aplique algún método algebraico para encontrar una fórmula que satisface la ecuación diferencial, sino que sea capaz de visualizar una red de relaciones gráficas, algebraicas e intuitivas entre la EDOPO, las derivadas y las propiedades cualitativas locales y globales de las soluciones desconocidas. Al esquema así construido por el estudiante se llama esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO.

Este esquema gráfico-algebraico para la resolución de una ecuación de primer orden $y' = f(x,y)y' = f(x,y)$ demanda la movilización de una red de relaciones entre las múltiples representaciones y significados de los siguientes objetos: i) el objeto función, ii) el objeto, derivada, iii) el objeto ecuación diferencial, iv) el objeto campo de direcciones y v) el objeto solución. Si la función del lado derecho de la ecuación se expresa mediante una expresión algebraica, se puede tratar de describir el comportamiento cualitativo de las soluciones mediante argumentos algebraicos o geométricos. Sin embargo, si $f(x, y)f(x, y)$ se expresa en forma gráfica, para describir el comportamiento de las soluciones lo natural es hacerlo mediante argumentos geométricos.

En consecuencia, se plantea el problema científico siguiente: ¿Cómo se puede construir en la estructura cognitiva del estudiantado un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO?

El objetivo de la investigación es caracterizar los mecanismos de construcción, funcionamiento y desarrollo en el estudiante de un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO, cuando participa en un proceso instruccional en el que se favorece la articulación de los registros de representación gráfica y algebraica de las soluciones de una EDOPO y se hace uso de las TIC.

3. Conclusiones

La teoría APOE -en particular, la descomposición genética propuesta en el apartado 2.5- no solo es una guía teórica y metodológica para el proyecto de tesis, sino que permite enriquecer el contenido y la metodología del proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias con secuencias de aprendizaje que favorecen la articulación de los registros de representación gráfica y algebraica de las soluciones de una EDOPO, superando con ello la exclusividad de los tradicionales procesos de algebrización y algoritmización a que ha estado sometido el currículo.

El trabajo de investigación subsiguiente tratará de determinar sí esas secuencias de aprendizaje permiten enriquecer el pensamiento, los conocimientos, las habilidades y los esquemas de los estudiantes, así como refinar la descomposición genética.

En particular, interesa determinar si en el esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO del estudiante se desarrollan habilidades metacognitivas que les permitan controlar los errores y superar los obstáculos y las dificultades que aparecen cuando se resuelve una EDOPO. Así como establecer si en ese esquema gráfico-algebraico se evoca, no sólo una expresión algebraica en la que se relaciona una función y su derivada y algún método algebraico para encontrar una fórmula que satisfaga la ecuación diferencial, sino que se moviliza una red rica de relaciones gráficas, algebraicas e intuitivas entre la función desconocida y sus derivadas que permiten construir el diagrama de soluciones de la ecuación diferencial.

También interesa determinar si el enfoque gráfico-algebraico es plausible y coadyuva a romper con la tendencia de los estudiantes a compartimentalizar y rutinizar los conocimientos y estrategias que exige la ruta de solución gráfica o cualitativa.

4. Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Buendía, G. y Cordero, F. (2013). The use of graphs in specific situations of the initial conditions of linear differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(6), 927-937. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790501

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2012a). An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part I). *The Teaching of Mathematics*, *XV*(1), 1–20.

Camacho, M.; Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2012b). An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part II). *The Teaching of Mathematics*, *XV*(2), 63–84.

Camacho-Machín, M. y Guerrero-Ortiz, C. (2015). Identifying and exploring relationships between contextual situations and ordinary differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(8), 1077-1095. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1025877

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., John, D., Tolias, G. y Vidakovic (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.

Coll, C. (2012). Grandes de la educación: Jean Piaget. Padres y Maestros / Journal of Parents and Teachers, (344).

https://revistas.comillas.edu/index.php/padresymaestros/article/view/532

Diarmaid Hyland, D., Kampen, P. y Nolan, B. (2019). Introducing direction fields to students learning ordinary differential equations (ODEs) through guided inquiry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1670367

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical Thinking* (pp. 25–41). Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24–41.

Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 95–126). Kluwer Academic Press.

Ferreiro, E. (1999). *Vigencia de Piaget*. Editorial Siglo XXI.

Fuentealba, C., Trigueros M., Sánchez-Matamoros G. y Badillo E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *AIEM-Avances de investigación en educación matemática*, 21, 23-44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

Oktaç, Asuman (2022). What's new with APOS theory? A look into levels and Totality. *AIEM-Avances de investigación en educación matemática*, 21, 9-21. https://doi.org/10.35763/aiem21.4245

Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. Journal of Mathematical Behavior, 55, 663–672. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003.

Montenegro, F. y Podevills, L. (2021). Propuesta de enseñanza mediada por TIC en la asignatura Álgebra Lineal desde APOE: Tesis de Maestría en carreras de Ingeniería en Informática. UNION - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 62, 1-17.

Piaget, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética 1. El pensamiento matemático*. Editorial Paidós.

Piaget, J. (1979). *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante*. Editorial Huemul S.A.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Editorial Siglo XXI.

Raychaudhuri, D. (2008). Dynamics of a definition: a framework to analyse student construction of the concept of solution to a differential equation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(2), 161–177. https://doi.org/10.1080/00207390701576874

Raychaudhuri, D. (2013). A framework to categorize students as learners based on their cognitive practices while learning differential equations and related concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(8), 1239-1256. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.770093

Raychaudhuri, D. (2014). Adaptation and extension of the framework of reducing abstraction in the case of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(1), 35-57. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790503

Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 3-21). Kluwer Academic Press.

Tall, D. (14 de mayo de 2005). *Advanced Mathematical Thinking.* http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/amt.html

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*(1), 5–31.