Conocimientos previos y GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Martín Enrique Guerra Cáceres
Universidad de El Salvador
martin.guerra@ues.edu.sv

Introducción

En el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior, la movilización de los conocimientos previos, la mediación semiótica y la génesis instrumental de los objetos, conceptos, técnicas y métodos matemáticos (Artigue, 2011; Monaghan et al, 2016) juegan un papel relevante para promover aprendizajes significativos, autónomos y críticos. En consecuencia, el objetivo de este trabajo es presentar una serie de acciones y operaciones que se proponen al estudiantado, al iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para movilizar sus conocimientos previos de Cálculo y acomodar en su estructura cognitiva un esquema gráfico-algebraico sobre lo qué significa resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden (EDOPO), más allá de los procedimientos algebraicos, así como para establecer conexiones entre la comprensión conceptual y procedimental, como antesala al estudio de los métodos de resolución propios de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

La actividad de aprendizaje que se presenta ha sido implementada en la asignatura Ecuaciones Diferenciales I que se imparte en las licenciaturas en matemática y en estadística de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador, en el marco del proyecto de investigación: “Construcción de un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una ecuación diferencial de primer orden”, que se lleva a cabo en el programa de Doctorado en Educación de la Facultad Multidisciplinaria de Occidente de la Universidad de El Salvador.

Desarrollo

Cognición de conocimientos matemáticos

En la teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE) se considera que el aprendizaje y el desarrollo de la comprensión de un concepto matemático comienza con una acción física o mental sobre un objeto previamente construido. Al adquirir un control consciente de la acción, entonces esta puede ser interiorizada para formar un proceso. Y cuando se adquiere conciencia de la totalidad del proceso, este puede ser encapsulado en un objeto. Los objetos pueden ser desencapsulados para volver a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Las construcciones mentales de acciones, procesos, objetos y los mecanismos que las conectan (interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión) se pueden organizar en una estructura mental llamada esquema. Luego, un esquema puede ser usado de manera consciente y flexible como un objeto -o una estructura estática- que permite asimilar otros objetos o esquemas (Arnon et al., 2014).

De manera holística, Dubinsky (1996) expresa: “El conocimiento matemático de una persona es su tendencia a responder ante una situación matemática problemática reflexionando sobre ella en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar esa situación”. (pp. 32-33)

La aplicación de la teoría APOE al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias, evidentemente, está mediada semióticamente. El uso y dominio progresivo de los signos y herramientas mediadoras juega un papel relevante en la actividad matemática y permite transformar los esquemas y desarrollar las habilidades matemáticas de la persona, haciéndolos cada vez más potentes y flexibles. Así, en este trabajo se muestra cómo, al iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales, se puede utilizar el software GeoGebra como herramienta para movilizar los conocimientos previos y realizar acciones que permitan ampliar y acomodar los “esquemas algebraicos para construir la gráfica de una función” ya elaborados por el estudiantado en cálculo diferencial.

Al introducir el uso de herramientas es importante tener en cuenta la distinción que la Aproximación Instrumental para el aprendizaje de las matemáticas hace entre artefacto -producto de la actividad humana y apropiable por un sujeto para realizar una tarea- e instrumento -apropiación y construcción mental que hace un sujeto de la herramienta-. Un artefacto no necesariamente es algo material, puede ser simbólico, como un algoritmo o un lenguaje. Un artefacto se convierte en instrumento a través de una compleja génesis instrumental, integrando el quehacer matemático. El proceso de génesis instrumental de un artefacto en un instrumento es un proceso doble: hay un proceso de instrumentación, dirigido del artefacto hacia el sujeto, y un proceso de instrumentalización, dirigido del sujeto al artefacto (Monaghan et al, 2016).

Ruta algebraica y ruta gráfica

Se llamará enfoque gráfico-algebraico al proceso de estudio y de resolución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) a través de la integración y coordinación de las representaciones gráfica y algebraica de las propiedades de sus soluciones y la mediación instrumental de GeoGebra. Lo que persigue este enfoque es que el estudiantado cuando se vea enfrentado a una EDOPO, no solo un vea un símbolo que relaciona una función y sus derivadas y prosiga a aplicar algún método algebraico-simbólico para encontrar una fórmula para las soluciones, sino que sea capaz de determinar conexiones gráficas y algebraicas entre la EDOPO, las derivadas y las propiedades cualitativas locales y globales de las soluciones desconocidas. Y mediante la coordinación de todo ello pueda construir con precisión la representación gráfica de las soluciones, que será llamada diagrama de soluciones o curvas integrales de la ecuación diferencial. Al esquema así construido por un estudiante se llamará esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO.

En la Figura 1 se muestran las rutas algebraica y gráfica para resolver una EDOPO (ver Guerra, 2022). En la ruta algebraica se aplican técnicas algebraicas y analíticas para determinar explícitamente las soluciones de la ecuación diferencial y, a partir de ello, dibujar el diagrama de soluciones. En la ruta gráfica se combinan técnicas geométricas y analíticas para analizar el comportamiento de las soluciones, sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación, y construir el diagrama de soluciones.

Un ejemplo ilustrativo: ruta algebraica versus ruta gráfica

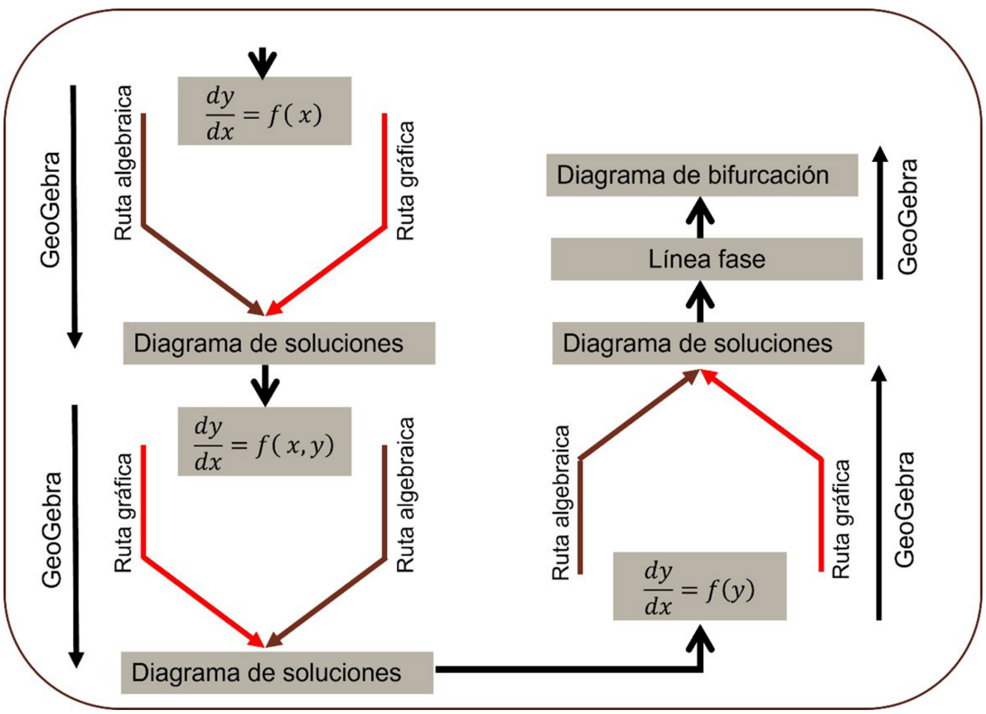
Considérese la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy \;\text{ o }\; \frac{dy}{dx} - xy = 1$$

La tarea de resolver esta ecuación es un ejercicio elemental, sin embargo, permite describir el funcionamiento de la ruta algebraica y la ruta gráfica. Y el papel que la última ruta puede jugar para acomodar los "esquemas algebraicos para graficar una función" elaborados por el estudiantado durante su estudio del Cálculo.

A continuación, se muestra cómo se puede construir el diagrama de soluciones -o diagrama de curvas integrales- siguiendo la ruta algebraica y la ruta gráfica.

Figura 1



Rutas algebraica y gráfica para construir el diagrama de soluciones

Ruta algebraica

La ruta algebraica describe la forma típica de actuación bajo el proceso de enseñanza-aprendizaje tradicional de las EDO, el cual se concibe como la continuación algebraica y algorítmica de las asignaturas de cálculo diferencial e integral y se puede caracterizar como un proceso en el que se privilegia el uso de procedimientos algebraicos, simbólicos y analíticos. El uso de técnicas gráficas está ausente o se limita a ilustrar los procedimientos algebraicos. En consecuencia, el estudiantado rara vez recurren a las representaciones gráficas para explorar propiedades de las soluciones o superar algunas dificultades conceptuales y procedimentales.

Para resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} - xy = 1$$

siguiendo la ruta algebraica, en primer lugar, se observa que ella es una ecuación lineal de primer orden. Entonces, multiplicando los dos términos de la ecuación por el factor integrante , se obtiene:

$$e^{-x^2/2}\frac{dy}{dx} - e^{-x^2/2}xy = e^{-x^2/2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2/2}y\right] = e^{-x^2/2}$$

Puesto que la expresión en el corchete $e^{-x^2/2}$ -que es una función de - es una antiderivada de $e^{-x^2/2}y = e^{-\frac{x^2}{2}}y(x)$, entonces

$$e^{-\frac{x^2}{2}}y(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}dt + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt + ce^{\frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R}$$

Esta última fórmula representa una familia de funciones o soluciones. Al darle un valor particular a se obtiene una función de la familia que satisface la ecuación diferencial.

Sin embargo, las propiedades cualitativas de las soluciones no son inmediatas a partir de esa fórmula. En efecto, lo que se observa en la actuación del estudiantado es un círculo vicioso al tratar de aplicar los "esquemas algebraicos para graficar una función" elaborados en Cálculo. Además, de manera recurrente, se ha constatado que hay estudiantes que no conciben que esa fórmula represente una función aceptable como otras donde solo aparecen funciones elementales y tampoco saben cómo proceder para verificar que dicha fórmula es solución de la ecuación diferencial. Se evidencia con ello la presencia de dificultades conceptuales y operacionales vinculadas a la regla de la cadena y la regla de Leibniz.

En el currículo tradicional, para tratar de superar esas dificultades, poder visualizar algunas propiedades cualitativas de las soluciones y fortalecer las habilidades de los estudiantes, se introducen algunas innovaciones haciendo uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). Pero ese uso es marginal y se limita a validar y visualizar los resultados obtenidos.

Por ejemplo, se puede usar el software GeoGebra para visualizar algunas propiedades cualitativas de la familia de soluciones obtenida arriba -de hecho, así se ha realizado en el desarrollo de la asignatura Ecuaciones Diferenciales I-. Para ello, al hacer el cambio de variables $w = \frac{t}{\sqrt{2}}$ en la integral que aparece en la fórmula y usar la función error, $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$, que viene en la librería de GeoGebra, se obtiene:

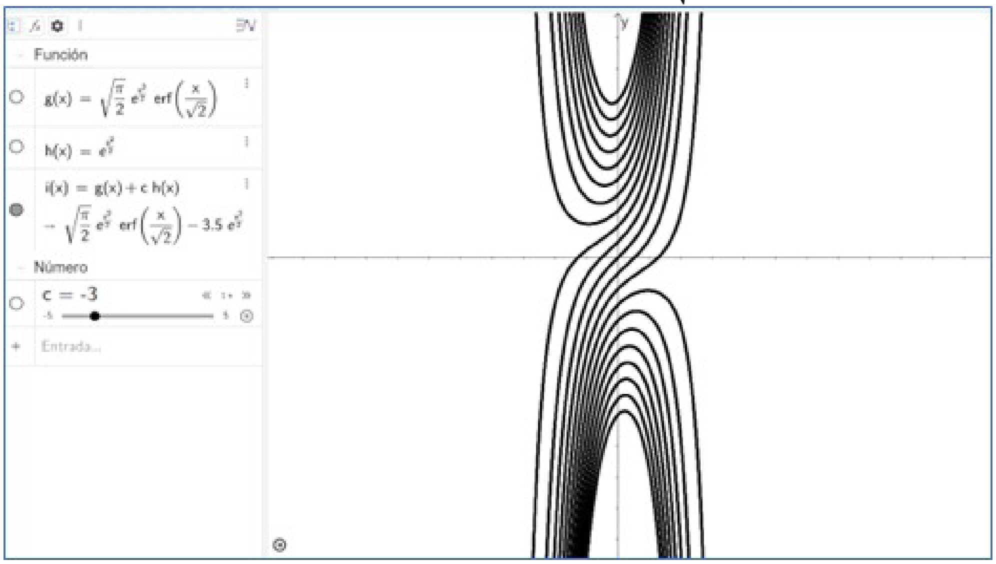
$$y(x) = e^{x^2/2}[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erf}\,(\frac{x}{\sqrt{2}})] + ce^{x^2/2}$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + ce^{\frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R}$$

Al escribir esta última fórmula en la ventana algebraica de GeoGebra se obtiene el diagrama de soluciones de la Figura 2, en el que se pueden apreciar algunas propiedades cualitativas de las soluciones.

Figura 2

Diagrama de soluciones obtenido con GeoGebra a partir de la fórmula $y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{x^2}{2}}\, erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c e^{\frac{x^2}{2}}$



Es oportuno señalar que la solución simbólica de la ecuación diferencial también se puede obtener con la ayuda del comando de GeoGebra “ResuelveEDO(f(x,y))” (véase la expresión en la ventana algebraica de la Figura 3). De manera que se podría obviar el procedimiento algebraico-analítico descrito antes.

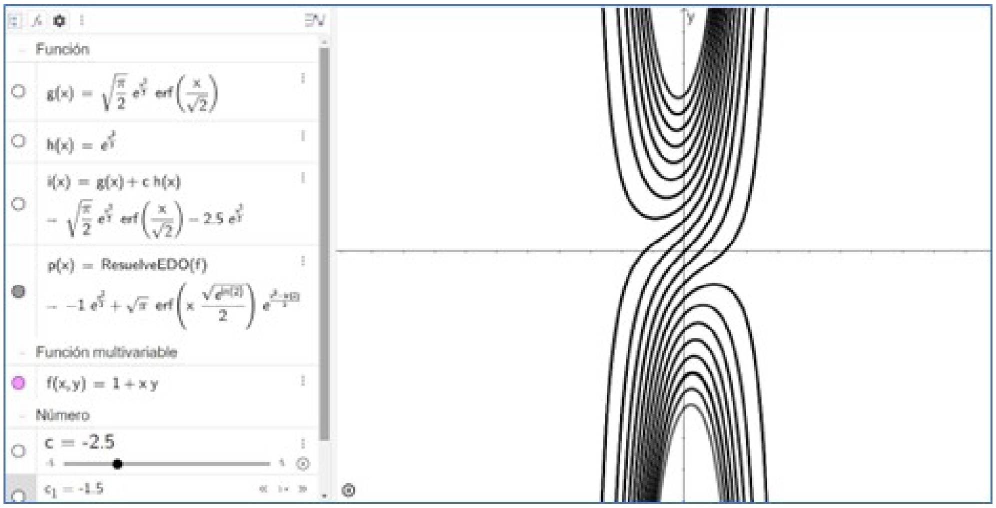
Sin embargo, esa forma de actuación no sería recomendable al iniciar el estudio de las EDO, puesto que limitaría el desarrollo de la comprensión y las habilidades matemáticas del estudiantado, al reducir el proceso de resolución de una ecuación diferencial a la ejecución de un comando o una serie de instrucciones en un software matemático cualquiera (GeoGebra, MATLAB, DField y PPlane, etc.).

Al contrario, lo que se persigue es la integración instrumental de las distintas herramientas computacionales y gráficas en el proceso de resolución de una ecuación diferencial ordinaria (Monaghan et al., 2016).

En el diagrama de soluciones de la Figura 2, se puede apreciar la monotonía y concavidad de las soluciones y distinguir los tipos de soluciones siguientes: las que tienen un mínimo, las que tienen un máximo, y las que no tienen extremos. O bien, las que tienen un punto de inflexión y las que no lo tienen.

Figura 3

Diagrama de soluciones obtenido con GeoGebra usando la instrucción "ResuelveEDO(f(x,y))"



También se podría preguntar en qué subconjuntos del plano ocurren los extremos y los puntos de inflexión. Esta pregunta invita al estudiantado a utilizar GeoGebra como una herramienta de indagación. Más adelante, en la ruta gráfica, se verá que estas conclusiones se pueden precisar indicando en qué lugar del plano ocurren los extremos y puntos de inflexión de las soluciones.

Sin embargo, la ruta seguida no sería efectiva o brindaría poca información si no es posible disponer de una fórmula para las soluciones o si GeoGebra no funciona. En el caso de que GeoGebra produzca una respuesta se puede preguntar: ¿cómo se sabe que los resultados que proporciona GeoGebra son válidos y se corresponden con las soluciones de la ecuación diferencial?

Ruta gráfica

En la ruta gráfica, para poder construir el diagrama de soluciones, se trata de deducir las propiedades cualitativas de las soluciones (monotonía, concavidad, extremos, puntos de inflexión, etc.) usando la ecuación diferencial y aplicando los criterios de la primera derivada y la segunda derivada del cálculo diferencial. De esta manera se abre una posibilidad para poder ampliar y acomodar el "esquema algebraico para construir la gráfica de una función", elaborado previamente en cálculo diferencial (Buendía y Cordero, 2013). Por su parte, GeoGebra se integra como una herramienta al servicio del aprendizaje de los conceptos, técnicas y métodos matemáticos que la resolución gráfica de una EDO demanda (Artigue, 2011).

En primer lugar, para conocer la monotonía y los posibles extremos de las soluciones, obsérvese que:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \leftrightarrow 1 + xy = 0 \leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$$

Esto significa que en los puntos donde las soluciones, si ellas existen[1], se intersecan con la hipérbola $y = -\frac{1}{x}$, la recta tangente es horizontal.

Si (x>0 e y>-1/x) o (x<0 e y<-1/x), entonces 1+xy>0, es decir, dy/dx>0. Y, por tanto, las soluciones son funciones crecientes en el subconjunto

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \text{ e } y > -\frac{1}{x}) \text{ o } (x < 0 \text{ e } y < -\frac{1}{x})\right\}$$

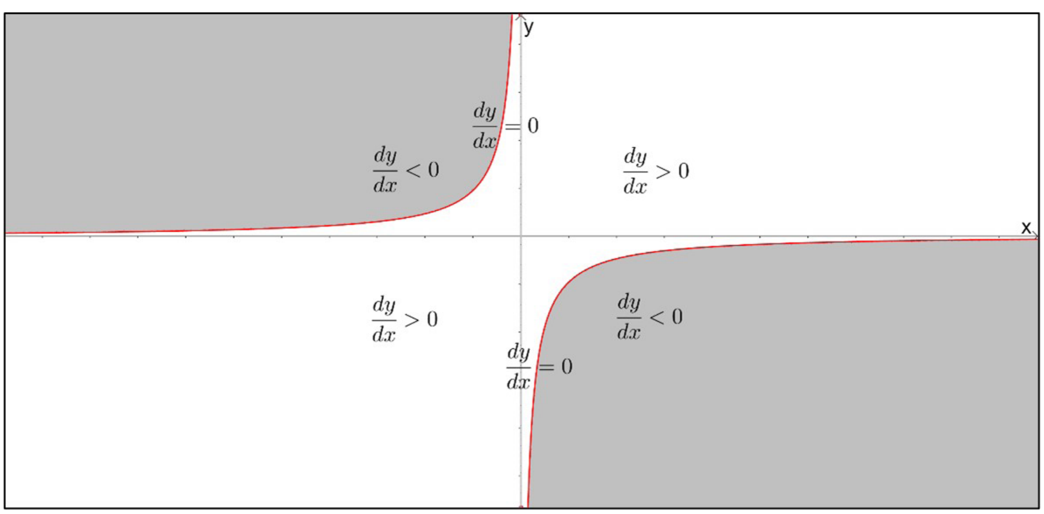
Si (x>0 e y<-1/x) o (x<0 e y>-1/x), entonces 1+xy<0, es decir, dy/dx<0. Y, por tanto, las soluciones son funciones decrecientes en el subconjunto

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \text{ e } y < -\frac{1}{x}) \text{ o } (x < 0 \text{ e } y > -\frac{1}{x})\right\}$$

En la Figura 4, se muestran los subconjuntos en que se divide el plano en función del signo de la derivada o de la monotonía de las soluciones. En el subconjunto blanco las soluciones son crecientes, mientras que en el gris son decrecientes.

Como la derivada $\frac{dy}{dx}$ se hace cero en la hipérbola $y = -\frac{1}{x}$ y una solución al cruzarla cambia de signo, entonces en la hipérbola deben aparecer los puntos máximos y mínimos de las soluciones.

Figura 4 *Subconjuntos en los que se divide el plano en función del signo de la primera derivada*



1 Los teoremas de existencia y unicidad garantizan que por cada punto del plano pasa una y solo una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ (ver Blanchard et al., 19999, pp.64-66).

Al recorrer una curva solución en la dirección creciente de x (de $-\infty$ a $+\infty$) se verifica que la derivada cambia de menos a más en la rama de la hipérbola que está en el segundo cuadrante y, por tanto, ahí aparecen los puntos mínimos de las soluciones; mientras que la derivada cambia de más a menos en la rama de la hipérbola que está en el cuarto cuadrante y, por tanto, ahí aparecen los puntos máximos de las soluciones.

En segundo lugar, para conocer la concavidad y los posibles puntos de inflexión de las soluciones, se tiene que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(1 + xy) = x\frac{dy}{dx} + y = x(1 + xy) + y = x + (x^2 + 1)y$$

Es decir,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x + (x^2 + 1)y$$

Entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \leftrightarrow x + (x^2 + 1)y = 0 \leftrightarrow y = -\frac{x}{1 + x^2}$$

Si $y > -\frac{x}{1+x^2}$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$. Y, por tanto, las soluciones son funciones cóncavas hacia arriba en el subconjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -\frac{x}{1 + x^2}\right\}$$

Si $y < -\frac{x}{1+x^2}$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Y, por tanto, las soluciones son funciones cóncavas hacia abajo en el subconjunto

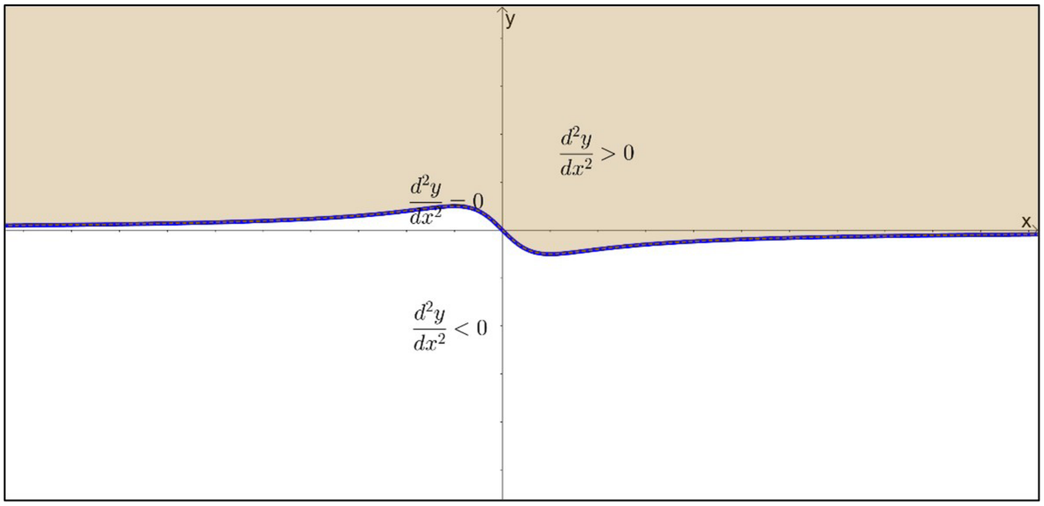
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -\frac{x}{1 + x^2}\right\}$$

Puesto que la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ cambia de signo al cruzar la curva $y = -\frac{x}{1+x^2}$, entonces en los puntos donde las soluciones se intersecan con la curva $y = -\frac{x}{1+x^2}$, deben aparecer los puntos de inflexión de las soluciones.

En la Figura 5, se muestran los subconjuntos en que se divide el plano en función del signo de la segunda derivada o de la concavidad de las soluciones. En el subconjunto café las soluciones son cóncavas haca arriba, mientras que en el blanco son cóncavas hacia abajo.

Figura 5

Subconjuntos en los que se divide el plano en función del signo de la segunda derivada



Además, obsérvese que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Lo que indica que en infinito las dos curvas $y = -\frac{1}{x}$ e $y = -\frac{x}{1+x^2}$ son asintóticas.

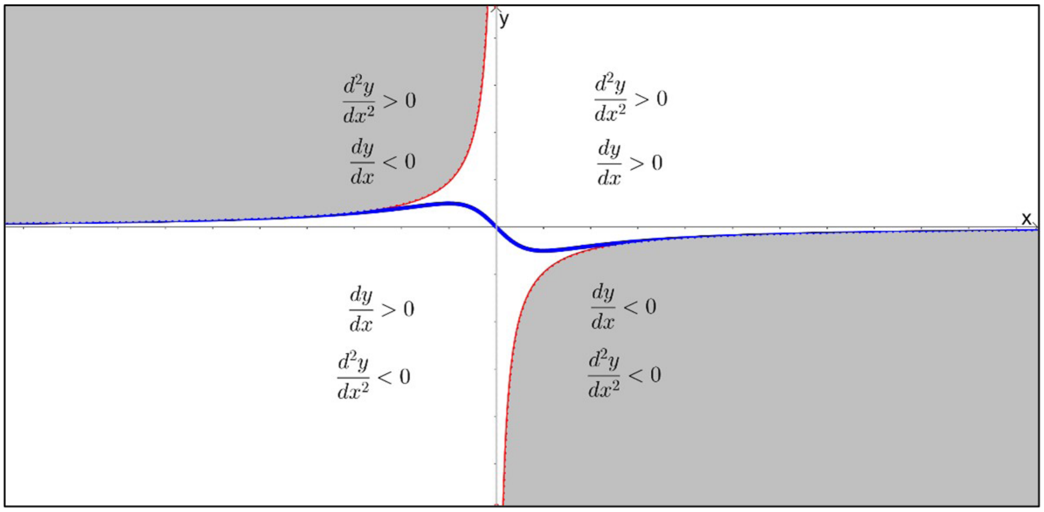
Si x>0, entonces $-\frac{1}{x} < -\frac{x}{1+x^2}$. Mientras que si x<0, entonces $-\frac{1}{x} > -\frac{x}{1+x^2}$. Por tanto, en el segundo cuadrante, la hipérbola $y = -\frac{1}{x}$ esta arriba de $y = -\frac{x}{1+x^2}$; mientras que, en el cuarto cuadrante la hipérbola está por debajo.

En la Figura 6, se muestran los cuatro subconjuntos en que se divide el plano en función de la monotonía y la concavidad de las soluciones.

El comando de GeoGebra "CampoDirecciones(f(x, y))" permite superponer en la Figura 6 el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial para obtener la Figura 7.

Figura 6

Subconjuntos en los que se divide el plano en función del signo de la primera y segunda derivada



En las Figuras 6 o 7, se puede describir verbalmente y dibujar manualmente algunas soluciones, siguiendo las conclusiones obtenidas antes sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones, a saber: monotonía, concavidad, extremos, puntos de inflexión, etc. y las indicaciones del campo de direcciones.

El comando de GeoGebra "ResuelveEDO(f, A)" permite dibujar una curva solución que pasa por el punto A. Al mover el punto A y al activar "Mostrar rastro" en la curva solución se puede obtener el diagrama de soluciones que se muestra en la Figura 8

Figura 7

Subconjuntos en función del signo de la primera y segunda derivada y campo de direcciones

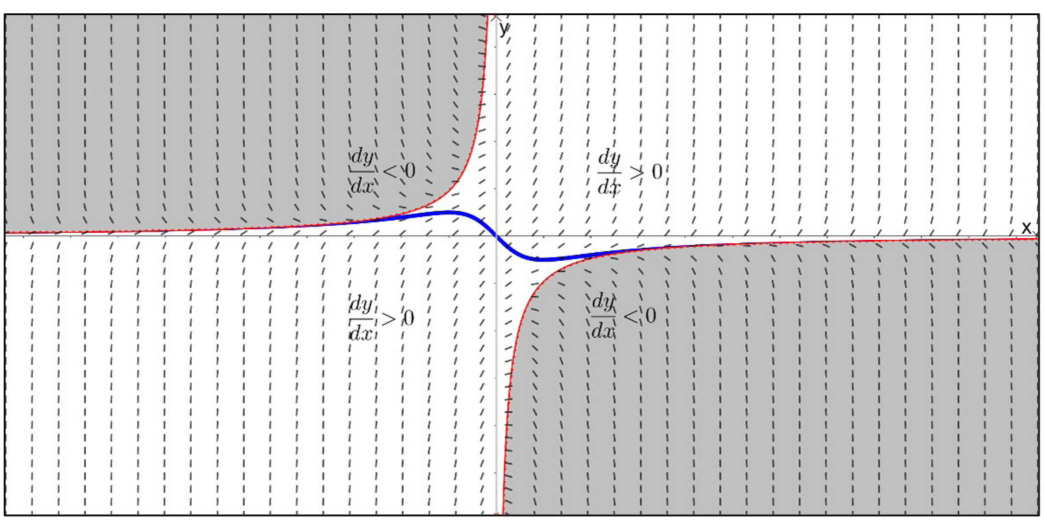
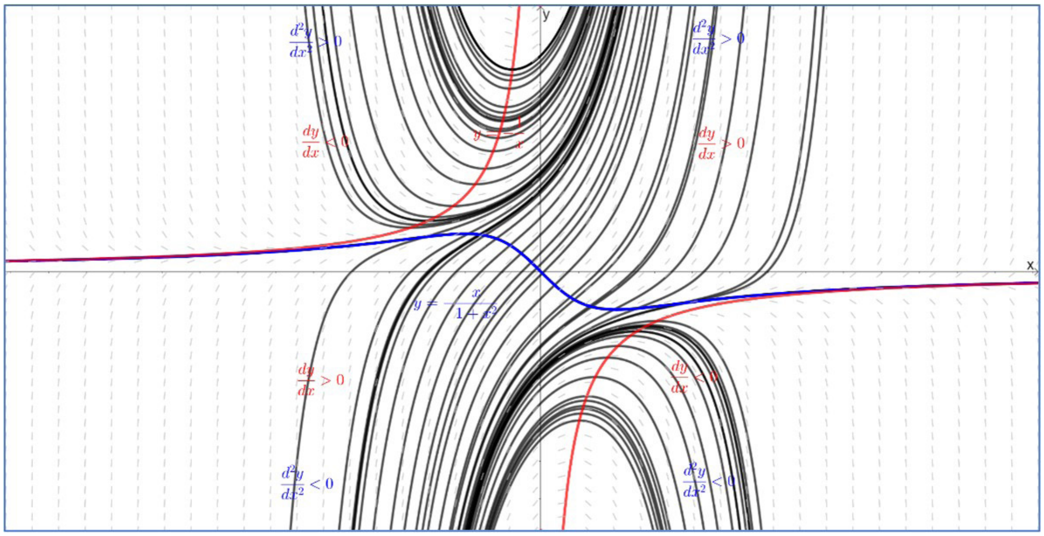


Figura 8

Diagrama de soluciones obtenido coordinando la información derivada por la ruta gráfica



Obsérvese que:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \leftrightarrow 1 + xy = 1 \leftrightarrow xy = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

Esto indica que cuando las soluciones intersecan los ejes, la recta tangente tiene una pendiente igual a 1(véase la Figura 8).

En el diagrama de soluciones de la Figura 8, se puede apreciar la monotonía y concavidad de las soluciones y distinguir los tipos de soluciones siguientes: las que tienen un punto de inflexión al intersecarse con la curva azul y las que no tienen punto de inflexión. Entre las soluciones que no tienen punto de inflexión, se distinguen las que tienen un mínimo y aquellas que tienen un máximo al intersecarse con la hipérbola roja.

Además, experimentando con GeoGebra, se puede tratar de determinar de manera aproximada las curvas que delimitan los subconjuntos del plano donde las soluciones tienen punto de inflexión o no lo tienen. Por ejemplo, una solución que pasan por el punto $(0,y_0)$ tal que $-1.25 \leq y_0 \leq 1.25$ tiene un punto de inflexión al cruzar la curva azul; mientras que una solución que pasan por el punto $(0,y_0)$ tal que $y_0 \leq -1.26$ o $y_0 \geq 1.26$ no tiene punto de inflexión.

Reflexión

Para el ejemplo ilustrativo presentado, las dos rutas resultan exitosas para dibujar el diagrama de soluciones. Desde una perspectiva operacional, la ruta algebraica resulta muy potente siempre y cuando ella permita obtener una fórmula -explícita o implícita- o un esquema numérico para las soluciones. Sin embargo, la ruta gráfica tiene la ventaja cognitiva de establecer conexiones transparentes entre el comportamiento cualitativo de las soluciones y las expresiones para la primera derivada -dada en la EDO- y la segunda derivada -obtenida de la EDO-, aun cuando ello puede demandar la realización de cálculos algebraicos laboriosos. En este caso el uso de GeoGebra podría reducir la carga cognitiva del algebra implicada.

Además, la ruta gráfica permite describir el comportamiento de las soluciones de una EDO cuando esta no puede ser resuelta por métodos algebraicos-simbólicos estándar $\frac{dy}{dx} = sen(xy)$ -por ejemplo, - o cuando ella depende de un parámetro -por ejemplo, $\frac{dy}{dx} + \mu y = x$-. En este esfuerzo, GeoGebra se muestra como una herramienta muy útil al favorecer la visualización y coordinación de los registros de representación gráfico y algebraico que demanda la ruta gráfica.

En general, la perspectiva de este trabajo es que la ruta gráfica y la ruta algebraica se complementan entre sí, aun cuando la ruta algebraica no sea exitosa. Las representaciones gráficas ayudan a comprender el comportamiento de la solución algebraica. Y análisis de la EDO permite comprender y describir gráficamente las soluciones de una EDO. De manera que la simbiosis entre ambas rutas ofrece itinerarios didácticos muy atractivos e innovadores (ver Rasmussen et al., 2018; Zeynivandnezhad y Bates, 2018; Zeynivandnezhad, 2016).

Conclusiones

Las producciones de los estudiantes, recogidas en las clases y las sesiones de resolución de ejercicios y problemas, ponen de manifiesto que la gestión de actividades de aprendizaje semejantes a las del ejemplo ilustrativo que se ha presentado arriba, en las que se invita al estudiantado a coordinar las rutas algebraica y gráfica y a hacer uso del software GeoGebra, son plausibles y no solo enriquecen el contenido y la metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que ellas le permiten al estudiantado desarrollar, desde un inicio, sin tener que esperar hasta llegar al estudio del plano fase, un esquema gráfico-algebraico del proceso de resolución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que no se limita solo a la ruta algebraica tradicional. El esquema gráfico-algebraico evoca, no sólo la expresión simbólica y algún método algebraico-analítico para resolver la ecuación diferencial, sino que también una red de conexiones y relaciones gráficas, algebraicas e intuitivas entre la función desconocida y sus derivadas que permiten construir el diagrama de soluciones de la ecuación diferencial. Además, dicho esquema resulta muy útil para describir las soluciones de una ecuación diferencial cuando no es posible encontrar una fórmula para las soluciones. También funciona como un esquema de asimilación clave tanto para construir el diagrama de bifurcación de una ecuación diferencial ordinaria que depende de un parámetro, como para construir el plano fase de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

En conclusión, la coordinación de la ruta algebraica y la ruta gráfica y la integración instrumental de GeoGebra sugerida en el ejemplo ilustrativo, al iniciar el estudio de las EDO, permite movilizar los conocimientos previos y ampliar y acomodar el “esquema algebraico para construir la gráfica de una función” elaborado previamente en cálculo diferencial y allanar el camino para desarrollar los esquemas gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO del estudiantado y poder extenderlos al estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales*. International Thomson Editores.

Buendía, G. y Cordero, F. (2013). The use of graphs in specific situations of the initial conditions of linear differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(6), 927-937. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790501

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24–41.

Guerra, M. (23-25 de agosto de 2022). *La teoría APOE: un marco actual para la investigación e innovación en Educación Matemática en el nivel superior* [Ponencia]. Precongreso Internacional de Educación Superior 2022 "Ciencia, Tecnología, innovación y creatividad en los procesos sustantivos de la Educación Superior", Comayagua, Honduras. https://revistas.ues.edu.sv/index.php/redised/article/view/2489/2480

Rasmussen, C., Keene, K. A., Dunmyre, J., y Fortune, N. (2018). Inquiry oriented differential equations: Course materials. https://iode.wordpress.ncsu.edu.

Raychaudhuri, D. (2014). Adaptation and extension of the framework of reducing abstraction in the case of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(1), 35-57. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790503

Zeynivandnezhad, F. (2016). Instrumental action schemes. Differential Equations Using a Computer Algebra System, Maxima. En Kaiser G. (Ed.) Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13, Hamburgo. Springer, Cham.

Zeynivandnezhad, F. y Bates, R. (2018) Explicating mathematical thinking in differential equations using a computer algebra system. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(5), 680-704. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1409368