# Estrategia Didáctica para Desarrollar un Esquema Gráfico y Algebraico del Concepto de Solución de Una Ecuación Diferencial Ordinaria: Un Estudio de Casos

***Martín Enrique Guerra Cáceres***
martin.guerra@ues.edu.sv
http://orcid.org/0000-0002-7177-8835

***Rodrigo Cruz Orellana León***
rodrigo.orellana2@ues.edu.sv
https://orcid.org/0000-0002-6249-3432

## Resumen:

En este trabajo se presenta una estrategia didáctica para desarrollar un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, así como una caracterización del esquema de un estudiante después de concluir una secuencia de aprendizaje bajo dicha estrategia mediada con GeoGebra. La metodología de investigación es de naturaleza cualitativa y está basada en un estudio de casos con un estudiante de quinto semestre de la Licenciatura en Matemática. Los datos fueron obtenidos a partir de un cuestionario y una entrevista semi estructurada. Las producciones del estudiante muestran que sus acciones y procesos están fuertemente ligados al modo de pensamiento algebraico y algorítmico, con conexiones cognitivas débiles entre las rutas algebraica y gráfica. Por tanto, se puede concluir que el estudiante ha desarrollado un esquema gráfico-algebraico débil del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que no se ha logrado consolidar como un objeto.

**Palabras clave:** Esquemas, ecuación diferencial ordinaria, ruta algebraica, ruta gráfica y enfoque gráfico-algebraico.

**Abstract:**

In this work, a didactic strategy is presented to develop a graphic-algebraic schema of the concept of solution of a first-order ordinary differential equation, as well as a characterization of a student's schema after concluding a learning sequence under said strategy mediated with GeoGebra. The research methodology is qualitative in nature and is based on a case study with a fifth semester student of the Bachelor's Degree in Mathematics. The data were obtained from a questionnaire and a semi-structured interview. The student's productions show that their actions and processes are strongly linked to the algebraic and algorithmic mode of thinking, with weak cognitive connections between the algebraic and graphic routes. Therefore, it can be concluded that the student has developed a weak graphic-algebraic schema of the concept of solution of a first-order ordinary differential equation, which has not been consolidated as an object.

**Keywords:** schemas, ordinary differential equations, algebraic route, graphic route, graphical-algebraic approach.

## 1. Introducción

Este artículo es parte de una investigación denominada "Estrategia didáctica para desarrollar un esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden" que se lleva a cabo en el Programa de Doctorado en Educación de la Facultad Multidisciplinaria de Occidente de la Universidad de El Salvador y está basado en dos ponencias dictadas por el autor en el marco del "Primer Congreso Internacional de Educación Superior" (Guerra Cáceres, 2022 a, b) y una pasantía de investigación realizada en la Universidad de San Carlos de Guatemala, durante septiembre de 2023.

Se presenta una estrategia didáctica que permite acomodar en la estructura cognitiva del estudiantado un esquema gráfico-algebraico sobre lo qué significa resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden (EDOPO) con la mediación de Geogebra, más allá de los procedimientos algebraicos-simbólicos (Raychaudhuri, 2013; Raychaudhuri, 2014) y del uso de GeoGebra como colofón en la clase tradicional (Arslan, 2010 a, b; West, 2016), estableciendo conexiones entre la comprensión conceptual y procedimental. Por otra parte, se analizan los esquemas formados por el estudiantado después de cursar una secuencia de aprendizaje ad hoc sobre las EDOPO mediada con GeoGebra (Diković, 2009 a, b; Orts et al., 2018).

## 2. Desarrollo

### 2.1.La noción de esquema

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un modelo cognitivo que permite describir la epistemología y estudiar la cognición de los conceptos matemáticos en el nivel universitario. Se postula que la construcción del conocimiento matemático en la estructura cognitiva de una persona pasa por cuatro estructuras mentales básicas, no necesariamente secuenciales, denominadas: acción, proceso, objeto y esquema. Estas estructuras emergen a raíz de la activación de mecanismos mentales tales como la interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión (Trigueros, 2005). Un esquema es una estructura dinámica que se transforma constantemente mediante la integración de nuevas relaciones y acciones con otros objetos y esquemas mediante la equilibración de los mecanismos de asimilación y acomodación (Fuentealba, 2022).

Dubinsky (1996) dice: "El conocimiento matemático de una persona es su tendencia a responder ante una situación matemática problemática reflexionando sobre ella en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar esa situación". (pp. 32-33). El término tendencia se refiere a la movilización de conexiones entre los constructos mentales y la forma de usarlas para tratar con la dicotomía desequilibración/reequilibración presente en la situación problemática.

Por su parte, Piaget (1978) afirma que el punto de partida del proceso cognoscitivo son las acciones: "... la acción es constitutiva de todo conocimiento. El conocimiento es dependiente de la acción y la acción es productora de conocimiento (...) solamente la coordinación de los esquemas de acción permitirá dar unidad a los objetos" (p. 15). La noción de esquema expresa "el conjunto estructurado de los caracteres generalizables de la acción, es decir de aquellos que permiten repetir la misma acción o aplicarla a nuevos contenidos" (p.16). Los esquemas, unidades básicas en la estructura cognitiva de un, pueden ser definidos como una serie de contenidos cognitivos estrechamente vinculados, que tienden a activarse y coordinarse con otros para formar esquemas más complejos. Las operaciones son acciones interiorizadas, reversibles, agrupadas en sistemas de conjunto con leyes de totalidad.

El sujeto no requiere interactuar físicamente con el objeto, sino que puede representarse una imagen mental de la acción en cuestión. Las operaciones en las cuales las acciones interiorizadas tienen como objeto imágenes de objetos materiales reciben el nombre de operaciones concretas. Y las que operan sobre otras acciones interiorizadas más básicas se llaman operaciones formales.

Piaget propone dos invariantes funcionales a la base de la cognición humana: la organización, que trata de responder al problema de la conservación de la identidad a lo largo de la ontogenia, y la adaptación, que trata de responder al problema de cómo es posible la transformación del organismo en su interacción con el medio, con conservación de la organización. La dinámica del desarrollo cognitivo se explica a través de un constante proceso de equilibración entre las dos fuerzas que permiten la adaptación: la asimilación y la acomodación (Fuentealba, 2022).

Toda asimilación implica cierto grado de acomodación y viceversa. La asimilación corresponde a la atribución de significados e integración de los objetos en los esquemas de acción, produciéndose una extensión del entorno y del poder de la cognición para actuar sobre dicho entorno. La asimilación no depende sólo del sujeto, sino que también influye la adecuación o compatibilidad entre los elementos y la estructura que pretende asimilarlos. En caso de que no exista esta compatibilidad hay dos vías de acción. O bien la naturaleza del objeto se encuentra fuera del ámbito de cosas asimilables en ese esquema, o bien el objeto está lo suficientemente cerca de lo asimilable. En este último caso, al efectuarse una modificación en la estructura que amplíe sus límites, el objeto puede ser asimilado.

Esta modificación en la estructura para ajustarse a las características del elemento externo es denominada acomodación. En la acomodación se produce un enriquecimiento de la estructura con la aparición de nuevas subestructuras diferenciadas que permite una flexibilización de la estructura original. La asimilación hace referencia a tres niveles dependientes de la naturaleza de lo que se asimila. Un primer nivel corresponde a la asimilación de un objeto exógeno al esquema y la acomodación recíproca de éste al primero. El segundo nivel se refiere a la asimilación recíproca entre esquemas de acción. Y el tercer nivel implica la diferenciación en subsistemas al interior de una estructura como resultado de la acomodación. Estos subsistemas se integran por asimilación recíproca en una nueva totalidad de nivel superior. Todas las estructuras que conforman la cognición humana tienen una génesis a partir de alguna estructura anterior. Por medio de procesos de transformación constructiva, las estructuras más simples van siendo incorporadas en otras de orden superior (Piaget y García, 2004, p. 246).

En consecuencia, la construcción de significados y el aprendizaje de un concepto matemático debe estar basado en la acción del sujeto cognoscente sobre el objeto conocido y la coordinación de los esquemas vinculados a ese concepto. Pero la significación también está condicionada social e históricamente: “cómo un sujeto asimila un objeto, depende del sujeto mismo; qué es lo que él asimila depende, al mismo tiempo, de su propia capacidad y de la sociedad que le provee la componente contextual de la significación del objeto” (Piaget y García, 2004, p. 245).

Por tanto, la comprensión de un concepto matemático comienza con acciones físicas o mentales sobre un objeto previamente construido. Cuando se adquiere un control consciente de la acción, entonces esta puede ser interiorizada para formar un proceso. Y cuando se adquiere conciencia de la totalidad del proceso, este es encapsulado en un objeto. Los objetos pueden ser desencapsulados para volver a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en totalidades llamadas esquemas (Arnon et al., 2014, pp. 18-26).

Un ejemplo de acción es resolver una EDOPO mediante el método de variables separables. El sujeto tiene una concepción de acción de la resolución de una EDOPO si calcula la solución aplicando paso a paso las reglas de dicho método. La concepción de acción es necesaria para el desarrollo de otras estructuras y, dependiendo del contexto, una acción puede ser básica o compleja. Un sujeto con un mayor nivel de desarrollo puede realizar una acción si así lo considera apropiado, sin estar supeditado a ella. Una persona tiene una concepción de proceso de la resolución de una EDOPO si es capaz de visualizar uno o más métodos de resolución sin necesidad de realizar el paso a paso de ese método. Si los métodos que se visualizan se limitan a la ruta algebraica, se dice que tiene una concepción de proceso algebraica.

Un estudiante con una concepción de proceso algebraica no puede resolver la EDOPO si ella no está dada mediante una expresión algebraica. En este caso, para poder resolver la EDOPO el estudiante debe tener una concepción de acción o de proceso gráfica que le permita realizar acciones adecuadas para determinar las propiedades cualitativas de las soluciones y visualizar y representar el diagrama de soluciones correspondiente. Una vez que se han construido procesos algebraicos y gráficos para resolver una EDOPO, estos pueden ser revertidos, transformados o coordinados entre ellos y con otros procesos, lo que permite obtener una concepción de objeto para la noción de solución de una EDOPO y construir un esquema para la resolución de una EDOPO.

Este esquema puede incluir solo métodos algebraicos o también puede incluir métodos gráficos. Estos pueden estar o bien yuxtapuestos en sendos compartimentos o bien interrelacionados e interconectados. Un esquema gráfico-algebraico para la resolución de la EDOPO $y' = f(x,\ y)$ demanda la movilización de una red de relaciones entre múltiples representaciones y significados de varios objetos: i) el objeto función, ii) el objeto derivada, iii) el objeto ecuación diferencial, iv) el objeto campo de direcciones y v) el objeto solución, entre otros. Si la función $f(x,\ y)$ se expresa mediante una expresión algebraica, se puede tratar de describir el comportamiento cualitativo de las soluciones mediante argumentos algebraicos o geométricos. Sin embargo, si $f(x,\ y)$ se expresa en forma gráfica, para describir el comportamiento de las soluciones lo natural es hacerlo mediante argumentos geométricos.

Piaget y García (2004) señalan que el desarrollo de un esquema puede describirse por medio de tres niveles que están presentes en la construcción de relaciones entre los elementos constitutivos de un esquema: intra-nivel, inter-nivel y trans-nivel. El intra-nivel se caracteriza por la construcción de relaciones y propiedades aisladas y particulares de acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. En el nivel inter se establecen y justifican transformaciones entre las relaciones construidas en el nivel intra. Estas transformaciones, a la vez, demandan el establecimiento de vínculos entre ellas, lo que nos lleva a la construcción de las estructuras características del trans-nivel. En este nivel, la persona ha construido una estructura que le permite entender las relaciones construidas en el inter-nivel y puede trabajar con el esquema de una manera mucho más flexible que cuando lo está en los otros dos niveles. El esquema no permanece inmóvil, sino que constantemente está enriqueciéndose mediante nuevas relaciones y transformaciones con otros objetos y esquemas.

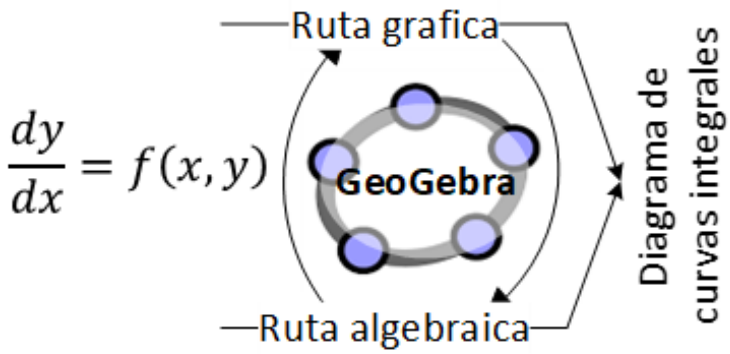
## 3. Estrategia didáctica

### 3.1.1. Enfoque gráfico-algebraico

En este trabajo, se llama enfoque gráfico-algebraico al proceso de resolución de una EDOPO mediante la coordinación de las rutas gráfica y algebraica. En la ruta algebraica se aplican técnicas algebraicas y analíticas para determinar fórmulas para las soluciones y, a partir de ellas, determinar las propiedades y comportamiento de las soluciones y dibujar el diagrama de soluciones. En la ruta gráfica se combinan técnicas geométricas y analíticas para analizar las propiedades y comportamiento cualitativo de las soluciones, sin necesidad de resolver la ecuación, y construir el diagrama de soluciones. En la Figura 1 se muestran las rutas algebraica y gráfica para resolver una EDOPO. En ambas rutas GeoGebra juega un papel clave.

**Figura 1**

*Rutas algebraica y gráfica para construir el diagrama de soluciones*




Se pretende así que cuando el estudiantado se enfrente con una EDOPO, no solo un vea un símbolo que relaciona una función y sus derivadas y aplique algún método algebraico-simbólico para encontrar una fórmula para las soluciones, sino que sea capaz de determinar conexiones gráficas y algebraicas entre la EDOPO y las propiedades cualitativas locales y globales de las soluciones desconocidas. Y mediante la coordinación de todo ello, con la mediación de GeoGebra, pueda construir con precisión una representación gráfica de las soluciones de la ecuación diferencial, la qué será llamada diagrama de soluciones o diagrama de curvas integrales. Al esquema, así construido por un estudiante se llamará esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO.

Desde una perspectiva operacional, la ruta algebraica resulta muy potente siempre y cuando se pueda deducir a partir de la fórmula el comportamiento cualitativo de las soluciones. No obstante, la ruta gráfica tiene la ventaja cognitiva de establecer conexiones transparentes entre el comportamiento cualitativo de las soluciones y las expresiones para la primera derivada (dada en la EDO) y la segunda derivada (obtenida derivando la EDO), aun cuando ello puede demandar la realización de cálculos algebraicos laboriosos. En este caso GeoGebra es una herramienta potente para reducir la carga cognitiva del álgebra implicada. Además, la ruta gráfica permite describir el comportamiento de las soluciones de una EDOPO cuando esta no puede ser resuelta por métodos algebraicos-simbólicos estándar. En este esfuerzo, GeoGebra se muestra como una herramienta muy útil al favorecer la visualización y coordinación de los registros de representación gráfica y algebraica (ver Rasmussen et al., 2018; Zeynivandnezhad y Bates, 2018; Zeynivandnezhad, 2016).

A continuación, se presenta un ejemplo ilustrativo de las acciones realizadas en la secuencia de aprendizaje ad hoc.

### 3.1.2.Un ejemplo ilustrativo de la secuencia de aprendizaje

Para describir el modo de operar en las rutas algebraica y gráfica para construir el diagrama de soluciones, considérese la siguiente EDOPO

$$x\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2} \tag{1}$$

Al escribir la ecuación en la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x^2} - y}{x}$, se verifica que las funciones $f(x,\ y) = \frac{e^{-x^2} - y}{x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}$ son funciones continuas en cualquier región del plano $xy$ que no contenga a la recta $x = 0$ y, por tanto, por cada punto del conjunto $\mathbb{R}^2 - \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}$ pasa una y sólo una solución (ver Blanchard et al, 1999, pp. 64-67). Además, como la ecuación es lineal y tiene coeficientes continuos en $\mathbb{R} - \{0\}$, entonces esas soluciones se pueden definir o bien en $(-\infty,\ 0)$, o bien en $(0,\ +\infty\infty)$.

**Ruta algebraica**

La ruta algebraica describe la forma típica de actuación bajo el proceso de enseñanza-aprendizaje tradicional de las EDO. Para resolver (1), obsérvese que la ecuación se puede escribir como $\frac{d}{dx}[xy] = e^{-x^2}$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo, $xy = \int_0^x e^{-t^2} dt + c, \quad c \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$y(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

La fórmula (2) es llamada solución general y representa una familia de funciones que satisfacen la EDOPO (1). Al darle un valor particular a $c$, se obtiene una función específica de la familia llamada solución particular. De otra manera, si se quiere la solución que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, entonces sustituyendo este punto en (2) y despejando $c$ se obtiene que $c = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} e^{-t^2} dt$ y, por tanto, la solución general se escribe como

$$y(x) = \frac{1}{x}\int_{x_0}^{x} e^{-t^2} dt + \frac{x_0 y_0}{x} \tag{3}$$

Por lo general, el currículo tradicional se conforma con obtener la solución general y representar gráficamente algunas soluciones particulares.

Sin embargo, se puede preguntar al estudiantado lo siguiente: ¿Satisfarán las funciones generadas por la fórmula la EDOPO? ¿Cuáles son las propiedades cualitativas de las soluciones?

En las respuestas de los estudiantes se pueden observar dificultades conceptuales y operacionales cuando tratan de verificar que la solución general (2) o (3) satisface la EDOPO (1) y aplican sus "*esquemas gráfico-algebraicos para graficar una función*" –heredados de las asignaturas de cálculo diferencial e integral– para describir las propiedades cualitativas de las soluciones. Ello debido a dos razones interrelacionadas: 1) no conciben que esa fórmula representa una función aceptable como otras donde solo aparecen funciones elementales y 2) no visualizan que la derivada se puede calcular aplicando la regla de Leibniz.

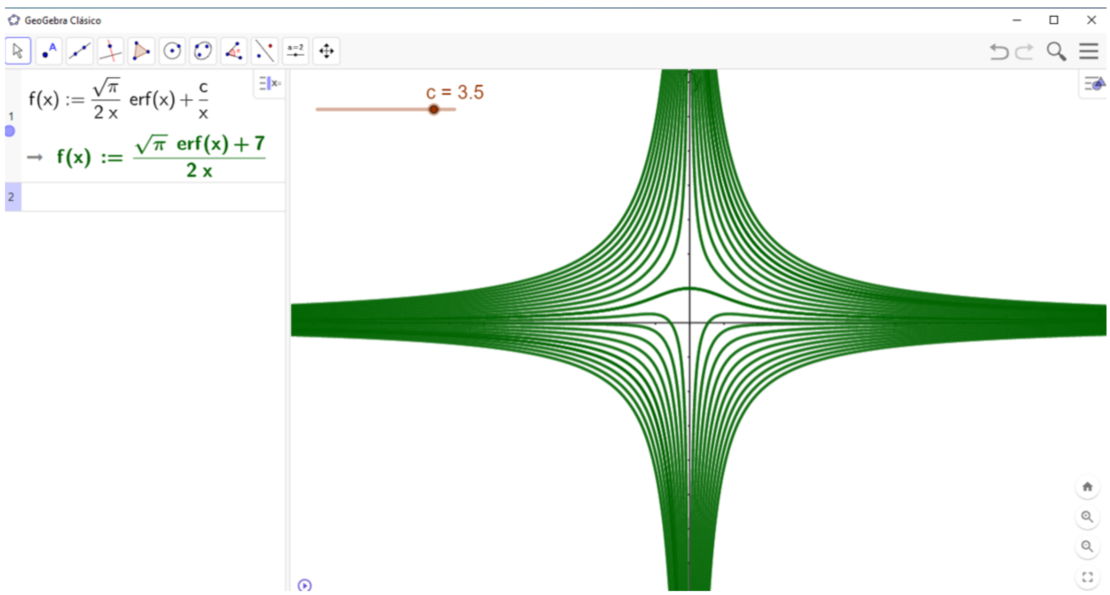
El currículo tradicional, para tratar de superar esas dificultades, poder visualizar algunas propiedades cualitativas de las soluciones y fortalecer las habilidades de los estudiantes, hace uso de los asistentes matemáticos. Pero, este uso es marginal y se limita a validar y visualizar los resultados obtenidos simbólicamente. Por ejemplo, se puede usar GeoGebra para visualizar la familia de soluciones obtenida arriba. Para ello, al usar la función error $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$, que viene en la librería de GeoGebra, entonces (2) se escribe como

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} erf(x) + \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Al introducir esta última fórmula en la ventana "Cálculo Simbólico (CAS)" de GeoGebra se obtiene el diagrama de soluciones de la Figura 2, en el que se pueden apreciar algunas propiedades cualitativas de las soluciones. Para ello, basta hacer clic derecho en la gráfica generada, activar la propiedad "Mostrar rastro" y mover el deslizador.

**Figura 2**

*Diagrama de soluciones obtenido a partir de la fórmula* $y(x) = (x) + \dfrac{c}{x}$




En la Figura 2, se puede apreciar la monotonía y concavidad de las soluciones y distinguir los tipos de soluciones siguientes: las que tienen un máximo y las que no tienen extremos. O bien, las que tienen un punto de inflexión y las que no lo tienen, etc. El currículo tradicional se da por satisfecho con lo hecho hasta aquí: usar los asistentes matemáticos para calcular o visualizar lo que se ha derivado de manera simbólica, dejando de lado el establecimiento de conexiones entre la ecuación diferencial y el diagrama de soluciones.

Es oportuno señalar que la solución simbólica de la ecuación diferencial y la Figura 2 se puede conseguir usando el comando de GeoGebra "ResuelveEDO(f(x,y))". Para ello, en la ventana "Vista Agebraica" de GeoGebra se escribe "ResuelveEDO($\dfrac{e^{-x^2} - y}{x}$)" o

en la ventana "Cálculo Simbólico (CAS)" se escribe "ResuelveEDO($x\,y' + y = e^{-x^2}$)".

Estas facilidades podrían conducir a sustituir el procedimiento algebraico-analítico descrito por otro proceso de resolución basado en la ejecución de una serie de comandos en un asistente matemático cualquiera (por ejemplo, Mathematica), lo que muy bien se podría llamar *hacer el currículo tradicional con asistentes matemáticos*. Sin embargo, esa forma de actuación limita el desarrollo de la comprensión y las habilidades matemáticas del estudiantado. Y, al contrario, lo que se persigue es la integración instrumental de las distintas herramientas conceptuales, computacionales y gráficas en el proceso de resolución de una ecuación diferencial ordinaria (Monaghan et al., 2016).

Obsérvese que si hacemos $c = 0$ en la fórmula obtenida arriba, se obtiene la siguiente solución particular $y_p(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt$, que está definida, o bien en $(-\infty,\ 0)$, o bien en $(0,\ +\infty)$. Al graficar $y_p(x)$ y experimentar con GeoGebra, se puede observar que[1]:

- Si $c > 0$ y $x > 0$ o $c < 0$ y $x < 0$, entonces $y(x) > y_p(x)$
- Si $c < 0$ y $x > 0$ *o* $c > 0$ y $x < 0$, entonces $y(x) < y_p(x)$.

En consecuencia, se puede afirmar que: las soluciones que están por debajo de $y_p(x)$ tienen un máximo y un punto de inflexión; mientras que las que están arriba no tienen extremos ni puntos de inflexión. Y enseguida, se puede preguntar: ¿Dónde ocurren los máximos de las soluciones? ¿Dónde ocurren los puntos de inflexión?

Estas preguntas invitarán al estudiantado a utilizar GeoGebra como una herramienta de indagación y a buscar conexiones entre el diagrama de soluciones y la ecuación diferencial. A continuación, se verá que en la ruta gráfica es posible dar respuestas precisas a esas preguntas.

**Ruta gráfica**

En la ruta gráfica, la construcción del diagrama de soluciones requiere deducir las propiedades cualitativas de las soluciones (monotonía, concavidad, extremos, puntos de inflexión y simetrías). Y ello puede hacerse usando la ecuación diferencial y aplicando los criterios de la primera derivada y la segunda derivada del cálculo diferencial. De esta manera se abre la posibilidad de poder ampliar y acomodar el "*esquema grafico-algebraico para graficar una función*" heredado del cálculo diferencial e integral (Buendía y Cordero, 2013) e integrar GeoGebra como una herramienta al servicio del aprendizaje de los conceptos, técnicas y métodos matemáticos que la resolución gráfica de una EDO demanda (Artigue, 2011).

---

[1] Estas observaciones se pueden justificar al analizar el signo de $y(x) - y_p(x) = \frac{c}{x}$.

Para ello, en primer lugar, se despeja la derivada de la ecuación (1) y se reescribe en la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x^2} - y}{x} \quad (5)$$

De aquí es posible conocer la monotonía y los posibles extremos de las soluciones. En efecto:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \ \leftrightarrow \ e^{-x^2} - y = 0 \ \leftrightarrow \ y = e^{-x^2}$$

Esto significa que en los puntos de intersección de las soluciones con la gráfica de la función $y = e^{-x^2}$, la recta tangente es horizontal.

Si $[\, x > 0 \ \ \text{y} \ \ e^{-x^2} - y > 0 \,]$ o $[\, x < 0 \ \ \text{y} \ \ e^{-x^2} - y < 0 \,]$ entonces $\frac{e^{-x^2} - y}{x} > 0$ y, por tanto, $\frac{dy}{dx} > 0$. Es decir, las soluciones son funciones crecientes en el subconjunto

$$A = \left\{ \left(x,\ y\right) \in R^2 \colon x > 0 \, y \, e^{-x^2} - y > 0 \right\} \cup \left\{ \left(x,\ y\right) \in R^2 \colon x < 0 \, y \, e^{-x^2} - y < 0 \right\}$$

Si $[\, x > 0 \ \ \text{y} \ \ e^{-x^2} - y < 0 \,]$ o $[\, x < 0 \ \ \text{y} \ \ e^{-x^2} - y > 0 \,]$ entonces $\frac{e^{-x^2} - y}{x} < 0$ y, por tanto, $\frac{dy}{dx} < 0$. Es decir, las soluciones son funciones decrecientes en el subconjunto

$$B = \left\{ \left(x,\ y\right) \in R^2 \colon x > 0 \, y \, e^{-x^2} - y < 0 \right\} \cup \left\{ \left(x,\ y\right) \in R^2 \colon x < 0 \, y \, e^{-x^2} - y > 0 \right\}$$

Los conjuntos A y B se pueden visualizar en GeoGebra al escribir en la "Venta Algebraica", respectivamente, las expresiones:

$$(\text{x} > 0 \ \wedge \ \text{y} < \ e^{-x^2}) \vee (\text{x} < 0 \ \wedge \ \text{y} > \ e^{-x^2})$$

$$(\text{x} > 0 \ \wedge \ \text{y} > \ e^{-x^2}) \vee (\text{x} < 0 \ \wedge \ \text{y} < \ e^{-x^2})$$

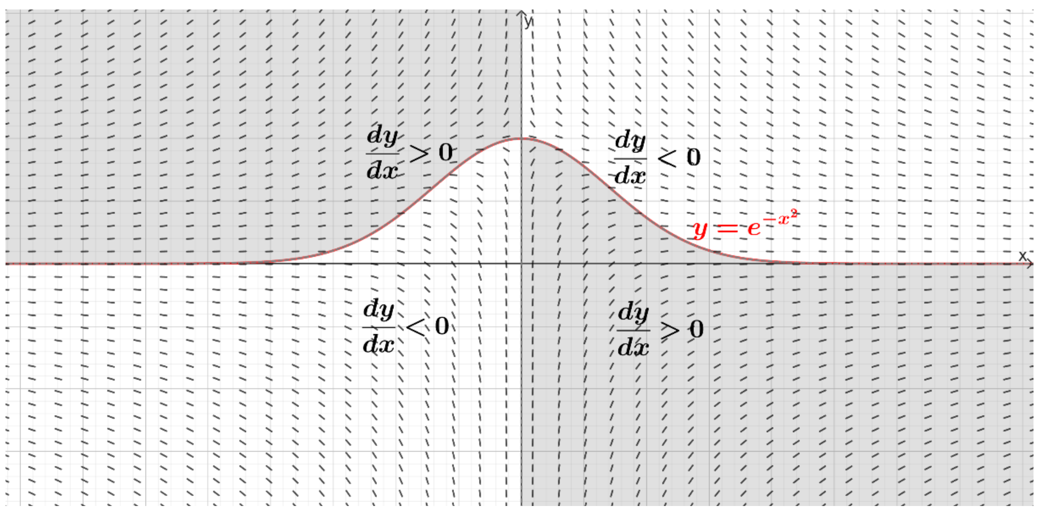
En la Figura 3, se muestran la gráfica de la función $y = e^{-x^2}$, los subconjuntos en que se divide el plano en función del signo de la derivada y el campo de direcciones asociado a la EDO. En el subconjunto blanco las soluciones son decrecientes, mientras que en el gris son crecientes. Obsérvese la coherencia entre las pendientes del campo de direcciones y el signo de la primera derivada.

El campo de pendientes se obtiene al escribir en la ventana "Vista Algebraica" de GeoGebra lo siguiente: "CampoDirecciones($\frac{e^{-x^2} - y}{x}$)".

Como la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una solución se hace cero y cambia de signo al cruzar la curva $y = e^{-x^2}$, entonces allí deben aparecer los puntos máximos y mínimos de las soluciones. Ahora bien, al recorrer una curva solución en la dirección creciente de $x$ (de $-\infty$ $a$ $+\infty$) se verifica que la derivada de una solución cambia de más a menos cuando $x < 0$ y $x > 0$ y, por tanto, en la curva $y = e^{-x^2}$ deben aparecer los puntos máximos de las soluciones.

**Figura 3**

*Campo de direcciones y subconjuntos en los que se divide el plano en función del signo de la primera derivada*




En segundo lugar, para conocer la concavidad y los posibles puntos de inflexión de las soluciones se calcula la segunda derivada de las soluciones. Para ello, al derivar la ecuación: $x\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2}$, se obtiene $\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2}$. Sustituyendo $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x^2} - y}{x}$ y despejando $\frac{d^2y}{dx^2}$ se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\left(y - e^{-x^2} - x^2e^{-x^2}\right)}{x^2}$$

Entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \; y = (1 + x^2)\, e^{-x^2}$$

Si $y > (1 + x^2)\, e^{-x^2}$, entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$. Y, por tanto, las soluciones son funciones cóncavas hacia arriba en el subconjunto

$$C = \left\{ \left(x,\ y\right) \in R^2 \colon\, y > (1 + x^2)\, e^{-x^2} \right\}$$

Si $y < (1 + x^2)\, e^{-x^2}$ , entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$. Y, por tanto, las soluciones son funciones cóncavas hacia abajo en el subconjunto

$$D = \left\{ \left(x,\ y\right) \in R^2 \colon\, y < (1 + x^2)\, e^{-x^2} \right\}$$

Puesto que la segunda derivada $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ se anula y cambia de signo al cruzar la curva $y = (1 + x^2)\, e^{-x^2}$, entonces allí deben aparecer los puntos de inflexión de las soluciones.

Los conjuntos $C$ y $D$ se pueden visualizar en GeoGebra al escribir en la "Venta Algebraica", respectivamente, las expresiones:

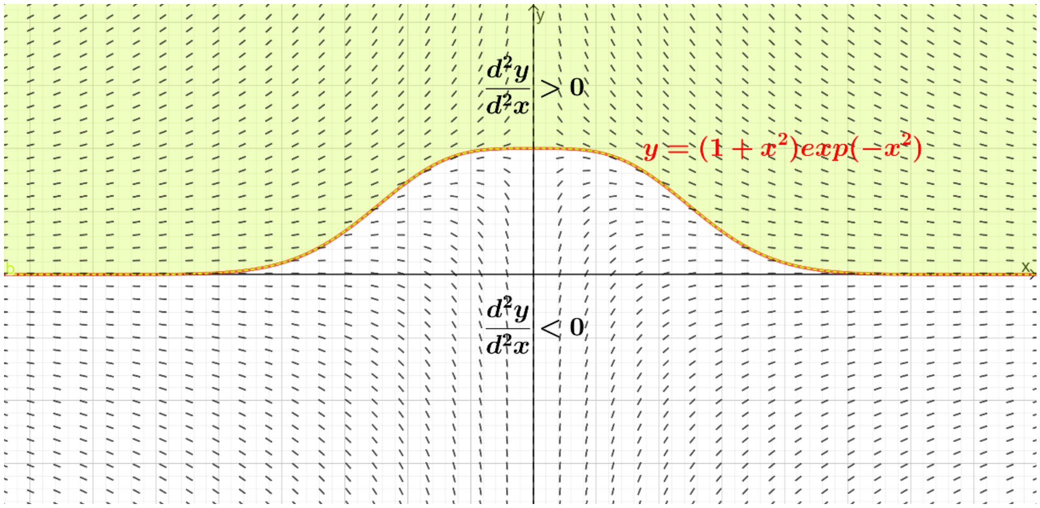
$$y > (1 + x^2)\, e^{-x^2}$$

$$y < (1 + x^2)\, e^{-x^2}$$

En la Figura 5, se muestran los subconjuntos en que se divide el plano en función del signo de la segunda derivada o de la concavidad de las soluciones. En el subconjunto café las soluciones son cóncavas haca arriba, mientras que en el blanco son cóncavas hacia abajo.

**Figura 4**

*Subconjuntos en los que se divide el plano en función del signo de la segunda derivada*




Además, obsérvese que si

$$g(x) = xe^{-x^2} - \int_0^x e^{-t^2}dt$$

entonces, se verifica que $g(0) = 0$ y $g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} = -2x^2e^{-x^2} < 0$. Por tanto, si $x > 0$, entonces $g(x) \leq g(0) = 0$. Si $x < 0$, entonces $g(x) \geq g(0) = 0$. Esto implica que

$$y_p(x) \geq e^{-x^2}$$

En la Figura 6, se muestran los cuatro subconjuntos en que se divide el plano en función de la monotonía y la concavidad de las soluciones. Y, muy bien se puede describir o dibujar manualmente algunas soluciones siguiendo las conclusiones obtenidas antes sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones —a saber: monotonía, concavidad, extremos y puntos de inflexión.— y las indicaciones del campo de direcciones.

El comando de GeoGebra “ResuelveEDO(f, A)” permite dibujar una curva solución que pasa por el punto A. Al mover el punto A y al activar “Mostrar rastro” en la curva solución se puede obtener el diagrama de soluciones que se muestra en la Figura 7.

**Figura 5**

*Subconjuntos en que se divide el plano en función del signo de la primera y segunda derivada y campo de direcciones*

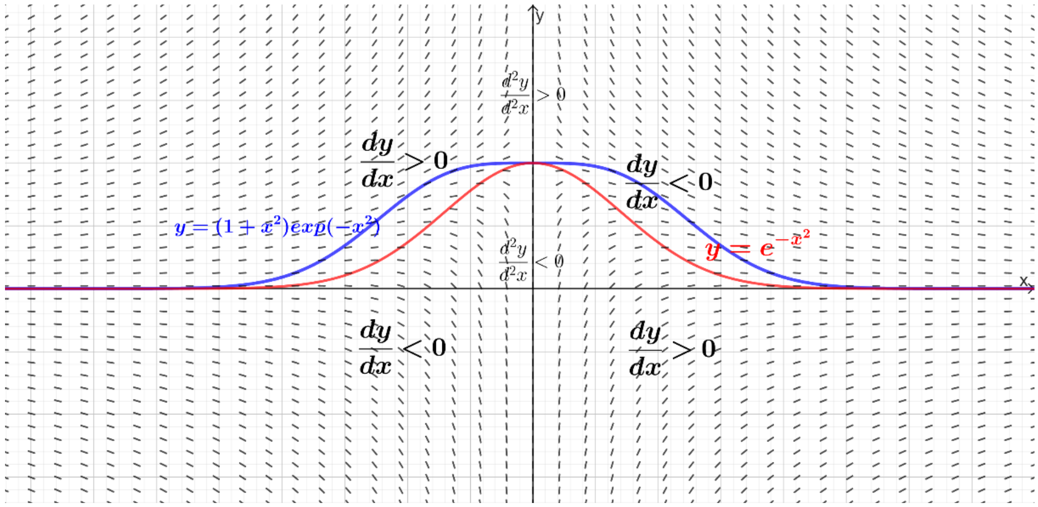
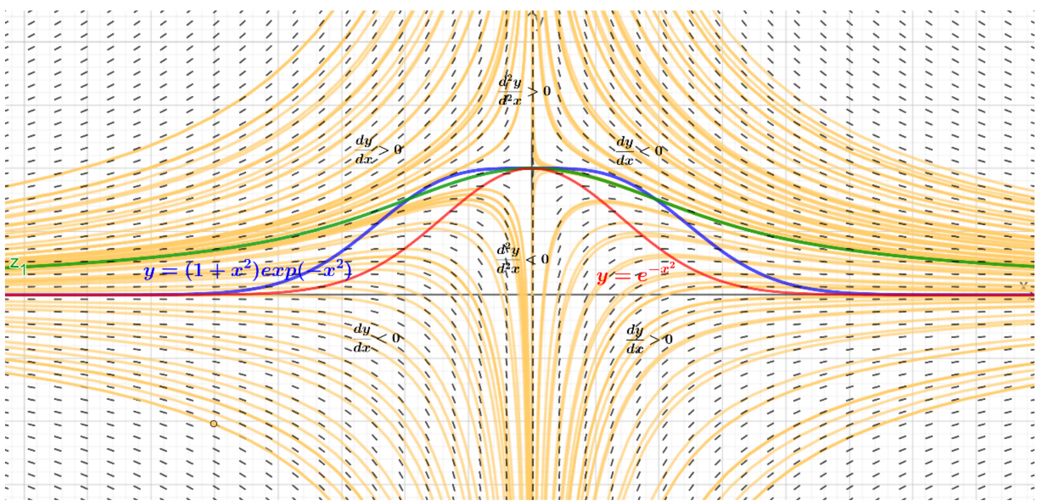



**Figura 6**

*Diagrama de soluciones obtenido coordinando la información derivada por la ruta gráfica*




En el diagrama de soluciones de la Figura 7, se puede apreciar la monotonía y concavidad de las soluciones y distinguir los tipos de soluciones siguientes: las que tienen un máximo al intersecarse con la curva roja y un punto de inflexión al intersecarse con la curva azul y las que no tienen punto de inflexión.

Por otra parte, al observar el campo de direcciones y experimentar con GeoGebra se puede conjeturar alguna simetría en el conjunto de soluciones. Por ejemplo, se puede objetivar la simetría del conjunto de soluciones respecto al eje *y* siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Seleccionar un punto A y con la herramienta “Simetría Axial” dibujar A’, su punto simétrico respecto al eje y.
2. Con el comando “ResuelveEDO(f, A)” representar las curvas solución que pasa por los puntos A y A’.
3. Con la herramienta “Punto” obtener un punto C que se mueve sobre la curva solución que pasa por el punto A.
4. Con la herramienta “Simetría Axial” dibujar C’, el punto simétrico a C respecto al eje y.
5. Mover el punto C y observar que C’ se mueve sobre la curva solución que pasa por el punto A’.

De manera semejante se puede determinar si el conjunto de soluciones tiene o no simetría respecto al origen o respecto al eje x.

La simetría en el conjunto de soluciones respecto al eje $y$, se puede verificar analíticamente haciendo un cambio de variables y usando la regla de la cadena, tal como se muestra a continuación:

$$X = -x,\ Y = y \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dx}\frac{dx}{dX} = -\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{e^{-x^2} - y}{x}$$

Por tanto,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{e^{-X^2} - Y}{X}$$

## 3. Metodología

La metodología de investigación es de naturaleza cualitativa y está basada en un estudio de casos con un estudiante de quinto semestre de la Licenciatura en Matemática. La recogida de datos se llevó a cabo dieciocho semanas después de concluir una secuencia de aprendizaje diseñada bajo el enfoque gráfico-algebraico mediado con GeoGebra. La secuencia tuvo una duración de 18 horas, distribuidas en tres sesiones de dos horas por semana, durante 3 semanas entre febrero y marzo de 2022, y se implementó en la asignatura Ecuaciones Diferenciales I que se imparte regularmente en las licenciaturas en matemática y en estadística de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Para la recogida de información, se solicitó al estudiante resolver y entregar por escrito la resolución de un cuestionario con cuatro ejercicios. Posteriormente se realizó una entrevista semiestructurada grabada en video para discutir las respuestas anticipadas y explorar el funcionamiento de su esquema gráfico-algebraico. En el análisis de la entrevista se aplicó el método de análisis temático, teniendo en cuenta las habilidades para graficar el diagrama de soluciones a partir de: 1) las fórmulas obtenidas y 2) el análisis de la EDOPO, sin necesidad de encontrar una fórmula. También, se analizó la habilidad para inferir y probar simetrías en el conjunto de soluciones utilizando el diagrama de soluciones y GeoGebra.

En el análisis de los datos se utilizaron extractos de la transcripción de la entrevista. En dichos extractos, por restricciones de espacio, se suprimieron las gráficas obtenidas con GeoGebra y se agregó un texto breve entre paréntesis que describe las acciones y representaciones contenidas en esas gráficas.

Es importante señalar que, la movilización tardía de la ruta gráfica y los bloqueos mentales experimentados durante la entrevista, condujeron al entrevistador a inducir las producciones del estudiante. Esa influencia no ha sido estudiada y aparece, por tanto, como una debilidad metodológica de este estudio.

## 4. Resultados

A continuación, se presentan los principales resultados del cuestionario y la entrevista. En primer lugar, se incluyen los referidos al uso y dificultades en la ruta algebraica; luego, los referidos al uso y dificultades en la ruta gráfica y, finalmente, los que tienen que ver con el establecimiento de simetrías en el conjunto de soluciones.

En el cuestionario se planteó resolver las EDOPO siguientes: a) $\frac{dy}{dx} = 2 sen x - y$, b) $\frac{dy}{dx} = y^2 - xy$, c) $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 2x + 2$ y d) $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$, las cuales fueron resueltas de manera eficaz siguiendo la ruta algebraica. En los ejercicios a) y c), el estudiante identificó cada ecuación como lineal y aplicó la técnica del factor integrante. En el ejercicio b), identificó la ecuación como una de tipo Bernoulli y, mediante un cambio de variable dependiente, la redujo a una ecuación lineal. Y en el ejercicio d), aplicó el método de separación de variables. En las Figuras 8 y 9, se muestra el proceso de resolución del estudiante para cada uno de los ejercicios propuestos.

Por tanto, el estudiante demuestra con ello que, después de 18 semanas de haber seguido la secuencia de aprendizaje, su esquema del concepto de solución de una EDOPO evoca sin dificultad los conocimientos y métodos algebraicos que la ruta algebraica demanda.

**Figura 7**

*Resolución algebraica de los ejercicios a y b*

a) $\frac{dy}{dx} + y = 2\,\text{sen}\,x$

El factor integrante sería $\mu(x) = e^x$

$$\rightarrow e^x\frac{dy}{dx} + e^x y = 2e^x\,\text{sen}\,x = \frac{d}{dx}(e^x y)$$

Integrando respecto de x

$$\rightarrow e^x y = 2\int e^x\,\text{sen}\,x\,dx + c$$

$$\int e^x\,\text{sen}\,x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx = -e^x\cos x + \left(e^x\,\text{sen}\,x - \int e^x\,\text{sen}\,x\,dx\right)$$

$$\rightarrow \int e^x\,\text{sen}\,x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\text{sen}\,x - \cos x)$$

$$\rightarrow e^x y = 2\cdot\frac{1}{2}e^x(\text{sen}\,x - \cos x) + C$$

$$\rightarrow \boxed{y = \text{sen}\,x - \cos x + Ce^{-x}}$$

b) $\frac{dy}{dx} = y^2 - xy$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} + xy = y^2$$

Definimos $t = y^{-1} \rightarrow \frac{dt}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$. Multiplicamos la ecuación por $-y^{-2}$

$$\rightarrow \underbrace{-y^{-2}\frac{dy}{dx}}_{dt/dx} + \underbrace{xy(-y^{-2})}_{-xt} = \underbrace{y^2(-y^{-2})}_{-1}$$

$$\rightarrow \frac{dt}{dx} - xt = -1$$

El factor integrante para esta ecuación es $\mu(x) = e^{-\int x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dt}{dx} - xe^{-\frac{x^2}{2}}t = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}t = -\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c$$

$$\rightarrow t = -e^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + ce^{\frac{x^2}{2}} = y^{-1}$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{1}{ce^{x^2/2} - e^{x^2/2}\int e^{-x^2/2}\,dx}}$$

**Nota:**

En la *resolución algebraica del ejercicio a), el estudiante identifica la ecuación como una ecuación lineal y aplica la técnica del factor integrante.*

En el ejercicio b), identifica la ecuación como una de tipo Bernoulli y la reduce a una lineal mediante un cambio de variable dependiente. Luego resuelve la ecuación mediante la técnica del factor integrante y deshace el cambio de variable.

**Figura 8**

*Resolución algebraica de los ejercicios c y d*

c) $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 2x + 2$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} - y = -x^2 + 2x + 2$$

$$\mu(x) = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

$$\rightarrow e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}(-x^2 + 2x + 2)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}(-x^2 + 2x + 2)$$

$$\rightarrow e^{-x}y = -\int x^2e^{-x}\,dx + 2\int xe^{-x}\,dx + 2\int e^{-x}\,dx + c$$

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx \quad \text{y} \quad 2\int e^{-x}\,dx = -2e^{-x}$$

$$\rightarrow e^{-x}y = -\left(-x^2e^{-x} + \cancel{2\int xe^{-x}\,dx}\right) + \cancel{2\int xe^{-x}\,dx} - 2e^{-x} + c$$

$$= x^2e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$\rightarrow \boxed{y = x^2 - 2 + ce^{x}}$$

d) $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$

$$\rightarrow e^y\frac{dy}{dx} = x$$

$$\frac{d}{dy}(e^y) = e^y \rightarrow \frac{d}{dy}(e^y)\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^y) = x$$

Integrando respecto de x:

$$\rightarrow e^y = \int x\,dx + c = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\rightarrow \boxed{y = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)}$$

**Nota:**

En la *resolución algebraica del ejercicio c), el estudiante identifica la ecuación como una ecuación lineal y aplica la técnica del factor integrante.*

En el ejercicio d), identifica la ecuación como una de variables separables y resuelve calculando antiderivadas.

En la entrevista, se confirma además que el estudiante tiene la competencia discursiva para argumentar lo que ha realizado de manera algebraica. También señala que moviliza, en primer lugar, la ruta algebraica debido a un criterio de eficiencia:

> I: ¿En qué piensa primero cuándo se le pide resolver un EDOPO ...?
>
> E1: Ah, el método más conocido y el más aplicado en ese tipo de ecuaciones, que tienen esa estructura, sería calcular el factor integrante respectivo. Y de esa manera, pues, ¡creo que se saca lo más rápido que se pueda ... ah ja!

Sin embargo, al final de la entrevista se replantea la pregunta y él matiza el significado del término "resolver", lo que indica la necesidad de cambiar este término por otros que movilicen las acciones y procesos que la ruta gráfica requiere:

> I: ... ¿Por qué hizo lo que hizo (señalando los ejercicios de la guía)?
>
> E1: ¿Aaa?
>
> E1: ... Sí, bueno, resolver para mí es justamente encontrar esas funciones que satisfacen o esas curvas que cumplen con esa expresión, con esa ecuación diferencial, entonces por eso mismo encontrar las soluciones, resolverla, sería justamente encontrar las funciones, ya sea explícita o implícitamente.
>
> I: ¿Y siempre se puede resolver una ecuación de manera algebraica?
>
> E1: De manera algebraica, no siempre, no se va a poder ... hay ecuaciones que no se pueden resolver ... por la integral, bueno.
>
> I: ... ¿Por qué razón lo primero que hace es exactamente eso que está aquí (señalando las respuestas escritas entregadas antes de la entrevista)? ¿A qué le atribuye usted eso?
>
> E1: Pues, sí, justamente, a la palabra que dice resolver, pero creo que resolver, si, implica muchas más cuestiones. Sí, principalmente, cuando uno ve una forma sencilla de resolverlas, como por factor integrante, pues, lo hace y no hace mucho más con las ecuaciones.

Sin embargo, se observan dificultades para representar gráficamente las soluciones a partir de la fórmula. Por ejemplo, se muestra estupefacto al preguntarle por el comportamiento cualitativo de las soluciones de los ejercicios a) y b) generadas a partir de las fórmulas. En el ejercicio a), se registra lo siguiente:

> I: ... está es la solución general del ejercicio a): $y = sen(x) - cos(x) + Ce^{-x}$
>
> E1: Exacto.
>
> I: ¿Qué podría decirme acerca del comportamiento cualitativo de las soluciones a partir de esta fórmula?
>
> E1: De la fórmula... ¿ah? ... no tengo muy claro cómo sería la gráfica de esta función ... pero digamos que tomando valores específicos ...
>
> I: ... ¿qué tipo de curvas hay?
>
> E1: ¿Ah ...?
>
> I: ... ¿cuál es el comportamiento de esa expresión cuando $x$ tiende a más infinito o cuando $x$ tiende a menos infinito?
>
> E1: Cuando $x$ tiende a más infinito veo que no se sabe que pasa con la relación, en realidad, por qué están esos seno y coseno, eso es indefinido cuando $x$ tiende a más infinito. Y cuando $x$ tiende a menos infinito, todo eso sigue definitivamente a infinito porque el término exponencial se hace positivo ...

Y en el ejercicio b, expresa:

> E1: Si, si, está fea la fórmula: $y = \left(Ce^{x^2/2} - e^{x^2/2}\int e^{-x^2/2}dx\right)^{-1}$ ... el comportamiento gráfico, a ver, usando la fórmula, por ejemplo, cuando ... entonces esa integral está ... jeje ... buena esa integral no se puede ...

Lo anterior indica la presencia de dificultades operacionales para poder describir gráficamente las soluciones a partir de las fórmulas obtenidas. Y, por tanto, para tratar de superarlas se invita al estudiante a utilizar GeoGebra. Entonces, usando esta herramienta, el estudiante es capaz de dibujar un diagrama de soluciones para el ejercicio a; pero fracasa en hacerlo en el caso del ejercicio b. Esto último es debido a la presencia en la fórmula de la solución general del término $\int e^{e^{-x^2/2}}dx$. (ver Figura 8).

I: … ¿Cómo podría usar GeoGebra para visualizar el comportamiento gráfico de las soluciones a partir de la formula obtenida y tratar, por ejemplo, de distinguir los distintos tipos de curvas?

E1: ¡Ah! …

I: Podría abrir GeoGebra y lo vamos viendo.

E1: Está bien … permítame … creo que se trabo el GeoGebra.

E1: … Sí, sí, ahí está ya, digamos que tengo la solución … Aquí puedo elegir la constante de menos cinco a cinco … y así (moviendo el deslizador) es como yo veo las soluciones … aquí está un poco más clara … (obteniendo un dibujo dinámico de las soluciones)

I: … ¿qué tipo de comportamientos se observan?

E1: … Sabemos que si el valor de $c$ es negativo, tenemos este comportamiento. Y si pasa a un valor positivo, tengo este otro comportamiento. Entonces, la frontera es esta, sí, supongo. Sería justamente en $C = 0$ porque ahí es donde se me va ese término exponencial.

I: ¿Qué sucede cuando $C = 0$?

E1: Solo queda esto, $y(x) = sen(x) - coscos\,(x)$ , que es una función periódica en todo su dominio.

I: Puede aplicar "mostrar rastro" a la curva verde que tiene ahí dibujada, ¿no? Y mover el deslizador para ver cómo es el diagrama de solución.

E1: Si … así, sería … (obteniendo un diagrama de soluciones)

I: ¿Por qué razón aparecen esos dos tipos de curvas que están separadas por la curva $y(x) = sen(x) - coscos\,(x)$ ?

E1: Sí, cambia el comportamiento, digamos, habría que ver cuando la constante es negativa, que pasa con la concavidad de las soluciones ….

Al usar GeoGebra y la fórmula obtenida logra dibujar un diagrama de soluciones para el ejercicio a), pero se puede notar la ausencia de argumentos para justificar las propiedades de las soluciones que son patentes en dicho diagrama. Ello es debido a que no se da cuenta de que $y(x) = sen(x) - \cos(x)$ es una solución particular.

I: ¿Hay alguna solución particular?

E1: Si, cuando $C = 0$ hay una solución particular.

I: Precisamente, que es la que estamos viendo, ¿no?

E1: Ah ja … eso, como por el límite, sería, ah ja.

E1: … Si, se aplica el teorema de existencia y unicidad … ¡Ah ja! Y como esta es una solución, las demás curvas no la tocan nada, no la van a cruzar, no la van a cruzar, por existencia y unicidad.

La fórmula obtenida para la solución general del ejercicio a, le permite afirmar que el dominio de cada una de las soluciones es $R$, pero no hace referencia a las propiedades de la ecuación. Y al preguntarle por el lugar geométrico de los extremos de las soluciones se sorprende otra vez:

> I: ¿Podría obtener dónde están apareciendo, digamos, los extremos, máximos y mínimos de esas curvas?
>
> E1: ¿Ah ja?, exactamente ... digamos que de manera precisa no puedo identificar el lugar geométrico donde aparecen los extremos de las curvas o soluciones ... en este caso parece ser como una especie de recta, pero no estoy seguro ... pero habría que corroborarlo haciendo la respectiva derivación ... los extremos aparecen en donde se acelera ... donde se anula esa derivada ....
>
> E1: La derivada sería $cos(x) + sen(x) - Ce^{-x}$ y la segunda derivada $-sen(x) + cos(x) + Ce^{-x}$ ... y los extremos aparecen donde la derivada es cero y los máximos y mínimos los podemos determinar cuando la segunda derivada es cero ...

Se observa así que para encontrar el lugar geométrico de los extremos recurre al "esquema algebraico-gráfico heredado del cálculo diferencial e integral", sin darse cuenta de que ese modo de actuar es circular, puesto que al calcular la primera derivada obtiene la EDOPO dada:

$$\frac{dy}{dx} = cos(x) + sen(x) - Ce^{-x} = cos(x) + 2sen(x) - sen(x) - Ce^{-x} = 2sen(x) - y$$

Ello indica que no es capaz de movilizar espontáneamente la ruta gráfica, la cual fue objeto de estudio en la unidad de aprendizaje. Y, por lo tanto, ella debe ser sugerida por el investigador.

> E1: ¡Ujum! estamos derivando directamente la solución, la fórmula para la solución. Pero el derivar obtenemos la relación que ya está en la ecuación.
>
> I: ... ¿Podría tratar de identificar cuál es el comportamiento cualitativo de las gráficas de las soluciones, sin usar la fórmula, es decir, sin resolver la ecuación?
>
> E1: Ah vaya, pues, ... ¿ah? ... no recuerdo cuál era el método.
>
> I: Observe que la ecuación $\frac{dy}{dx} = 2sen(x) - y$ nos da la derivada.
>
> E1: Si, ... cómo, qué, ... ¿qué tendría que hacer ahora? ... resolverla ...?
>
> I: ¿Qué se le ocurre hacer para describir gráficamente las soluciones? ¿Qué herramientas podría utilizar?
>
> E1: ¿Uuum? ... el campo de direcciones es una cosa ... pero ... si, si ya, y aquí se ve el comportamiento de las curvas ... esta es la primera cosa ... (obteniendo el campo de direcciones)
>
> E1: ... Y de ahí puedo (bostezos) tratar de resolver la ecuación directamente ... sería ... bueno, podría marcar un punto sobre el plano y encontrar la solución para ese respectivo punto. Y como hay existencia y unicidad solo me da una curva ... sería A y ahí está ... (obteniendo una solución particular en el campo de direcciones)

Llegado a este punto, el estudiante logra evocar la ruta gráfica y la aplica con eficiencia para representar los diagramas de soluciones de los ejercicios a), b) y d), sin necesidad de resolver las EDOPO. En cada ejercicio es capaz de determinar analíticamente tanto los lugares geométricos donde aparecen los extremos y los puntos de inflexión de las soluciones, como dividir el plano en subconjuntos de acuerdo con la monotonía y concavidad de las soluciones. Además, demuestra eficiencia en el uso de GeoGebra para visualizar y tratar con esos subconjuntos. Coordinando todo ello junto con las consecuencias geométricas de los teoremas de existencia y unicidad, es capaz de obtener un diagrama de soluciones dinámico (a partir del movimiento del deslizador de GeoGebra):

E1: Ah, sí, exactamente, sería una ... sería esta curva $y = 2sen(x)$ ... Esta es la curva que contiene los extremos ... (agregando una curva azul a la representación anterior que muestra una solución particular en el campo de direcciones).

I: ... Y esa curva, evidentemente, divide al plano en dos partes: una dónde el campo dependiente es positivo $(2sen(x) - y > 0)$, es decir, donde las curvas son crecientes y otra dónde el campo es negativo $(2sen(x) - y < 0)$, y las curvas son decrecientes, ¿verdad? Y esos subconjuntos puede dibujarlos y colorearlos en GeoGebra.

E1: Ah, creo que eso se puede hacer directamente en GeoGebra.

E1: ... Si, si, funciona ... me da la región donde esto es negativa y en este caso serían crecientes ... (agregando las zonas de color acuerdo con el signo de la derivada a la representación anterior que muestra la curva azul y una solución particular en el campo de direcciones).

I: ... ¿Y de los puntos de inflexión que podemos decir?

E1: La segunda derivada sería derivar esto respecto de $x$ ... sería esta la segunda derivada $\frac{d^2y}{d^2x} = 2coscos\,(x) - \frac{dy}{dx} = 2coscos\,(x) - 2sen(x) + y$. Al final sería, simplificando, $\frac{d^2y}{d^2x} = 2(coscos\,(x) - sen(x)) + y$ sería la segunda derivada.

E1: ... Y para encontrar los puntos de inflexión ... igualamos a cero ... y obtenemos la curva $y = 2(x) - cos(x))$. Y este sería el lugar geométrico de los puntos de inflexión (dibujando la fórmula obtenida, agregando zonas de color acuerdo con el signo de la segunda derivada y moviendo el deslizador para verificar que donde las soluciones cortan a esta curva se observan cambios de concavidad).

E1: Sí, aquí en esta zona son cóncavas hacia abajo y en esta otra, son cóncavas hacia arriba ...

Sin embargo, se observan dificultades para argumentar por qué aparecen los distintos tipos de curvas que se muestran en el diagrama de soluciones. En el ejercicio b expresa:

E1: Digamos que hay como tres tipos de curvas: serían las que están ... como que parece que siempre son como cóncavas hacia arriba, las que son siempre cóncavas hacia abajo, y estas que están como en medio, que varían su comportamiento, pero como que este, el límite sería como que la solución se va a cero.

También, se observan dificultades para reconocer la existencia de algún tipo de simetría en el conjunto de soluciones a partir del diagrama de soluciones o usar GeoGebra para verificar si hay o no tales simetrías. Por ejemplo, en el ejercicio b se registra:

> I: ¿Hay alguna simetría entre esas curvas (haciendo referencia al diagrama de soluciones del ejercicio b)?
>
> E1: Ah ... creo que sí, respecto del eje $x$ ... respecto de $y = x$, tal vez, creo que sí se podría ver alguna simetría. Pero no sé si son las de abajo ... creo que las que están en medio podrían ser impares, tal vez ...

Tampoco es capaz de verificar analíticamente si hay o no hay simetría en el conjunto de soluciones en los ejercicios b) y d):

> I: ... ¿Cómo establece que hay simetría impar a partir de la ecuación?
>
> E1: Solo de la ecuación, pues, sería a través de evaluar en menos equis ...
>
> E1: ... Bueno, sería evaluar en menos x y quedaría $-\frac{dy}{dx} = y^2 + xy$
>
> I: ¿Qué cambio de variables debería de hacer para establecer la simetría respecto al origen ...?
>
> E1: ¿Ah?
>
> E1: ... ¿Uuum? ... eso sí sería de verlo...
>
> I: ¿Se le viene algo la memoria?
>
> E1: Es que ... yo pensaba que ... a ver ... permítame ...
>
> Y en ejercicio d, señala:
>
> E1: Sería con x igual, bueno, cambiando por menos x ...por regla de la cadena quedaría $-\frac{dy}{dx} = -xe^{-y}$... al final es lo mismo ...

## 5. Discusión

La resolución escrita de los cuatro ejercicios y la argumentación correspondiente durante la entrevista revela que el enfoque algebraico se evoca automáticamente en la memoria de largo plazo del estudiante, mientras que el enfoque gráfico no.

Sin embargo, en la entrevista se observa la presencia de dificultades operacionales para al intentar describir gráficamente las soluciones basadas en la fórmula de la solución general. El uso de GeoGebra ayuda a superar algunas de estas dificultades, pero persisten dificultades conceptuales relacionadas al teorema fundamental del cálculo. Por ejemplo, el estudiante es capaz de dibujar un diagrama de soluciones para el ejercicio a); pero no logra hacerlo en el ejercicio b) debido a la presencia en la fórmula del término $\int e^{-\frac{x^2}{2}}$. Esto indica la presencia de dificultades conceptuales relacionadas al teorema fundamental del cálculo. Además, se observa que en el ejercicio a), el estudiante no es capaz de argumentar o justificar las propiedades de las soluciones patentes en el diagrama de soluciones.

Por tanto, en una primera aproximación, se puede concluir que la ruta algebraica no se ha consolidado con la implementación de la secuencia de aprendizaje ad hoc, ni mucho menos el enfoque gráfico-algebraico. Esto coincide con lo que reporta Habre (2000, 2003) donde señala que el impacto del currículo reformado de las ecuaciones deferenciales ordinarias en el pensamiento y las habilidades de los estudiantes puede ser mínimo y que el conocimiento conceptual puede permanecer fuertemente ligado esquemas algebraicos.

De acuerdo con la Teoría acción, proceso, objeto, esquema (APOE) (Arnon et al., 2014), se puede afirmar que el esquema del estudiante sobre el concepto solución de una EDOPO se caracteriza entonces por el predominio de acciones y procesos subordinados al modo de pensamiento algebraico y algorítmico. Ello posiblemente está condicionado por el significado diacrónico que tiene la consigna “resolver” a lo largo del desarrollo del currículo de matemáticas, desde los niveles elementales hasta el nivel superior, tal como se evidencia durante la entrevista cuando se le pide al estudiante que explique por qué movilizó en primer lugar la ruta algebraica.

Pero, ello también pone en tela de juicio uno de los objetivos de la unidad de aprendizaje ad hoc que pretendía enriquecer el significado del término “resolver” con acciones y procesos de la ruta gráfica que permiten determinar las propiedades cualitativas locales y globales de las soluciones desconocidas sin necesidad de resolver la EDOPO. De manera que el término “resolver”, además de su significado tradicional, también pueda significar: construir con precisión el diagrama de soluciones de una EDOPO. Y, en consecuencia, cuando el estudiantado se enfrente a una EDOPO, no solo un vea un símbolo que relaciona una función y sus derivadas y aplique algún método algebraico-simbólico para encontrar una fórmula para las soluciones, sino que sea capaz de determinar conexiones gráficas y algebraicas entre la EDOPO y las propiedades cualitativas locales y globales de las soluciones desconocidas. Desde otra perspectiva, la digresión anterior indica la necesidad de cambiar la consigna “resolver” por otras más precisas que conecten con las acciones y procesos que demanda la ruta gráfica.

No obstante, durante la entrevista, la interacción con el investigador y la reflexión propia del estudiante permiten la recuperación del enfoque gráfico en la memoria de largo plazo. De esta manera el estudiante logra establecer, no sin dificultades, algunas conexiones cognitivas entre las rutas algebraica y gráfica para tratar con las propiedades cualitativas de las soluciones, realizar tareas de conversión entre los registros de representación gráfico y algebraico y poder representar gráficamente el diagrama de soluciones usando el software GeoGebra. Ello le permite determinar analíticamente tanto los lugares geométricos donde aparecen los extremos y los puntos de inflexión de las soluciones, como dividir el plano en subconjuntos de acuerdo con la monotonía y concavidad de las soluciones. Además, también demuestra eficiencia en el uso de GeoGebra para visualizar y tratar con esos subconjuntos. Coordinando todo ello, es capaz de obtener un diagrama de soluciones dinámico (a partir del movimiento del deslizador).

Sin embargo, se observa tanto dificultades conceptuales para argumentar por qué aparecen los distintos tipos de curvas que contiene el diagrama de soluciones, como dificultades operacionales para reconocer en el diagrama de soluciones la existencia de algún tipo de simetría en el conjunto de soluciones o para usar GeoGebra como herramienta para experimentar si hay o no tales simetrías. Tampoco el estudiante es capaz de realizar un cambio de variables para verificar analíticamente si hay o no determinada simetría en el conjunto de soluciones.

## 6. Conclusiones

La discusión señala que hay indicios para afirmar que el estudiante ha logrado desarrollar un incipiente esquema gráfico-algebraico del concepto de solución de una EDOPO, pero este esquema no se ha logrado consolidar como un objeto, puesto que la aplicación del esquema se limita a realizar las acciones y procesos que las rutas gráfica y algebraica demanda con conexiones débiles entre ellas. La latencia de la ruta gráfica en el esquema del estudiante indica que hay un predominio de la ruta algebraica, por una parte, y que es necesario cambiar la consigna “resolver” por otras más precisas que conecten con las acciones y procesos que demanda la ruta gráfica, por otra.

Además, dicho esquema gráfico-algebraico se puede caracterizar como débil puesto que, al tratar de establecer conexiones entre las rutas algebraica y gráfica, se logran evidenciar tanto dificultades operacionales y conceptuales que bloquean dichas conexiones, como la falta de razonamientos matemáticos que permitan justificar por qué aparecen determinados comportamientos en las soluciones, ya sea de manera algebraica o gráfica.

Las producciones del estudiante durante la entrevista ponen de manifiesto que el enfoque de la secuencia de aprendizaje es plausible y permite enriquecer el enfoque, el contenido y la metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje de las EDOPO, al invitar al estudiantado a coordinar las rutas algebraica y gráfica y a hacer un uso instrumental del software GeoGebra para investigar propiedades y comportamiento cualitativo de las soluciones, así como para desarrollar su competencia discursiva para explicar, argumentar y justificar sus producciones, más allá del enfoque tradicional.

Este enfoque gráfico-algebraico, además, tiene el valor añadido de movilizar los conocimientos previos, ampliar y acomodar el “esquema grafico-algebraico para construir la gráfica de una función” heredado del cálculo diferencial e integral y facilitar el tránsito hacia el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales en el plano fase. En particular, este enfoque resulta útil para describir las soluciones de una ecuación diferencial cuando no es posible encontrar una fórmula para las soluciones. También funciona como un esquema de asimilación clave tanto para construir el diagrama de bifurcación de una ecuación diferencial ordinaria que depende de un parámetro.

## Referencias

**Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014).** *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

**Arslan, S. (2010a).** Do students really understand what an ordinary differential equation is? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(7), 873-888. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.486448

**Arslan, S. (2010b).** Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 20*(2), 94-107. https://doi.org/10.1093/teamat/hrq001

**Buendía, G., & Cordero, F. (2013).** The use of graphs in specific situations of the initial conditions of linear differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(6), 927-937. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790501

**Camacho, M.; Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2012a).** An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part I). The Teaching of Mathematics, XV(1), 1–20.

**Camacho, M.; Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2012b).** An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part II). The Teaching of Mathematics, XV(2), 63–84.

**Camacho-Machín, M. y Guerrero-Ortiz, C. (2015).** Identifying and exploring relationships between contextual situations and ordinary differential equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(8), 1077-1095. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1025877

**Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., John, D., Tolias, G. y Vidakovic (1997).** Constructing a schema: the case of the chain rule. Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 345-364.

**Coll, C. (2012).** Grandes de la educación: Jean Piaget. Padres y Maestros / Journal of Parents and Teachers, (344).

https://revistas.comillas.edu/index.php/padresymaestros/article/view/532

**Diarmaid Hyland, D., Kampen, P. y Nolan, B. (2019).** Introducing direction fields to students learning ordinary differential equations (ODEs) through guided inquiry. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1670367

**Dreyfus, T. (2002).** Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed), Advanced mathematical Thinking (págs. 25–41). Kluwer Academic Press.

**Dubinsky, E. (1996).** Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8(3), 24–41.

**Dubinsky, E. (2002).** Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (págs. 95–126). Kluwer Academic Press.

**Diković , L. (2009a).** Implementing Dynamic Mathematics Resources with GeoGebra at the College Level. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 4*(3), 51-54. https://www.learntechlib.org/p/45282/

**Diković , L. (2009b).** Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems, 6*(2), 191-203. https://doi.org/10.2298/CSIS0902191D

**Fuentealba, C., Trigueros M., Sánchez-Matamoros G. y Badillo E. (2022).** Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. AIEM-Avances de investigación en educación matemática, 21, 23-44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

**Guerra Cáceres, M.E. (2022).** Conocimientos previos y GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *REDISED Revista Diálogo Interdisciplinario sobre Educación*, 4(2), 121-134. https://revistas.ues.edu.sv/index.php/redised/article/view/2783/2768

**Habre, S. (2000).** Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 455–472. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00024-9

**Habre, S. (2003).** Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(5), 651–662. https://doi.org/10.1080/0020739031000148912

**Hyland, D., van Kampen, P., & Nolan, B. (2021).** Introducing direction fields to students learning ordinary differential equations (ODEs) through guided inquiry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(3), 331-348. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1670367

**Kouki, R., & Griffiths, B. (2021).** Semiotic Aspects of Differential Equations: Analytical and Graphical Competency in the USA and Tunisia. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 25*(2), 174-184. https://doi.org/10.1080/18117295.2021.2003135

**Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (2019).** Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. Journal of Mathematical Behavior, 55, 663–672. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003.

**Montenegro, F. y Podevills, L. (2021).** Propuesta de enseñanza mediada por TIC en la asignatura Álgebra Lineal desde APOE: Tesis de Maestría en carreras de Ingeniería en Informática. UNION – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 62, 1-17.

**Oktaç, Asuman (2022).** What's new with APOS theory? A look into levels and Totality. AIEM-Avances de investigación en educación matemática, 21, 9-21. https://doi.org/10.35763/aiem21.4245

**Orts, A., Boigues Planes, F., & Llinares Ciscar, S. (2018).** Génesis Instrumental del Concepto de Recta Tangente. *20*(2), pp. 72-83. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss2id3833

**Piaget, J. (1978).** Introducción a la epistemología genética 1. El pensamiento matemático. Editorial Paidós.

**Piaget, J. (1979).** Investigaciones sobre la abstracción reflexionante. Editorial Huemul S.A.

**Piaget, J. y García, R. (2004).** Psicogénesis e historia de la ciencia. Editorial Siglo XXI.

**Raychaudhuri, D. (2013).** A framework to categorize students as learners based on their cognitive practices while learning differential equations and related concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(8), 1239-1256. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.770093

**Raychaudhuri, D. (2014).** Adaptation and extension of the framework of reducing abstraction in the case of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(1), 35-57. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790503

**Tall, D. (2002).** The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (págs. 3-21). Kluwer Academic Press.

**Tall, D. (14 de mayo de 2005).** Advanced Mathematical Thinking. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/amt.html

**Trigueros, M. (2005).** La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17(1), 5–31.

**Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2018).** Documentational Approach to Didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-11). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1

**West, B. H. (2016).** Teaching Differential Equations without Computer Graphics Solutions is a Crime. *CODEE Journal, 11*. https://scholarship.claremont.edu/codee/vol11/iss1/2